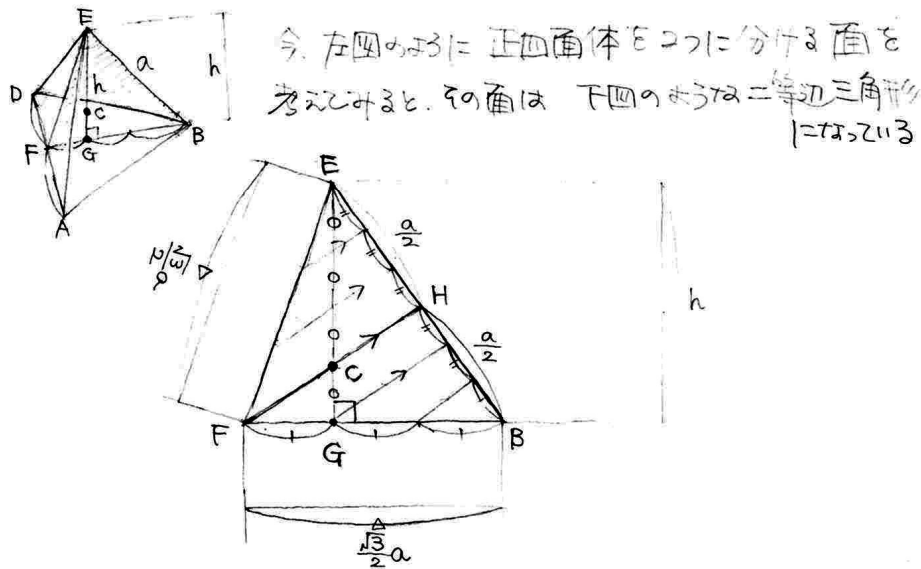


- 正四面体の^{1/2}の長さの棱の長さ a と高さ h と中心位置 C 点_{とある}について



今、左図のように正四面体を2つに分ける面を考えると、その面は下図のような二等辺三角形になっている

すなわち直角三角形 $\triangle EGB$ (もしくは $\triangle EGF$)に三平方の定理を適用すれば
 $(EG)^2 + (GB)^2 = (EB)^2 \Leftrightarrow h^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a \times \frac{2}{3}\right)^2 = a^2$
 $\Leftrightarrow h^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 = a^2 \quad \therefore h = \sqrt{\frac{2}{3}}a = \frac{\sqrt{6}}{3}a$

また G 点は(正四面体底面 $\triangle ABD$ の重心位置であり)線分 FB を1:2に内分する。
 また H 点は(対称性より)線分 BE の中点である。以上より、上図の様に線分 FH に平行な補助線を引いてみると、

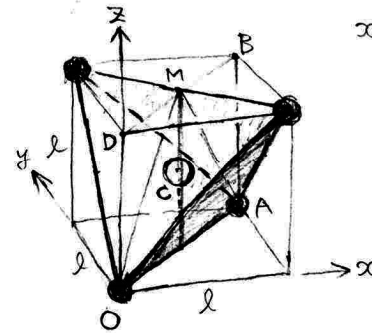
C 点は線分 GE を1:3に内分する。ことがわかる
 言い換えると
 C 点の正四面体の1つの面からの距離は $\frac{h}{4} = \frac{\sqrt{6}}{12}a$ となっている
 (上図は底面 $\triangle ABD$)

更に CE はこの3倍なので...

C 点と正四面体の1つの頂点との距離は $\frac{3}{4}h = \frac{\sqrt{6}}{4}a$ となっている
 ($= \sqrt{\frac{3}{8}}a$)

(参考1)

今、正四面体を、下の図の様に一辺 l の立方体の(隣合のない)4つの頂点で形成することもできる。



xyz 座標を四角の様に与えたい

4つの頂点座標は

$(0,0,0) (l,l,0) (l,0,l) (0,l,l)$

であり

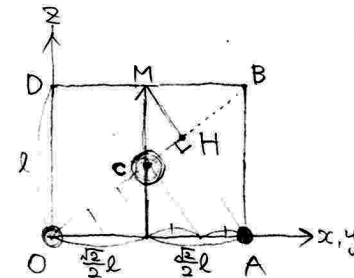
中心点 C (四角の中心)の座標は $(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, \frac{l}{2})$

である。このことから

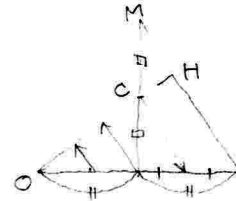
中心 C から1つの頂点(例えば O 点)までのキヨリは
 $OC = \frac{\sqrt{3}}{2}l$ とわかる。

1つの棱の長さ a は、 $a = \sqrt{2}l$ となる

$OC = \frac{\sqrt{3}}{2}l = \frac{\sqrt{6}}{4}a (= \sqrt{\frac{3}{8}}a)$ とわかる。



又、長方形 $OABD$ での切り口を考えると...



C は OH を3:1に内分していることがわかる

OH は正四面体の高 $=h$ に相当するので

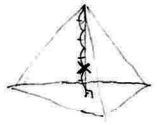
$\tilde{CH} = \frac{1}{4}h$... 正四面体の面と C までのキヨリ

($OC = \frac{3}{4}h$... " 1つの頂点 ")

となっている

(参考2) 結局.

正四面体の中心 C は 高さ h を $\frac{1}{4}h : \frac{3}{4}h$ に内分する
(重心)



↑ 底面からの高 (Cまでの高)
↑ 頂点からの高

と3角形 正三角形の中心は (その正三角形の) 高さ h を $\frac{1}{3} : \frac{2}{3}$ に内分する
(重心)



↑ 底面からの高 (中心までの高)
↑ 頂点からの高

また (長さ1の) 線分の中心は (その線分を) $\frac{1}{2} : \frac{1}{2}$ に内分する

一般に (n-1)次元空間における
正n面体 (正確には最小多面体) = $n-1$ 次元最小多面体
の中心は 高さ h を $\frac{1}{n} : \frac{n-1}{n}$ に内分する
↑ 頂点までの高 ↑ 底面までの高 (1つの面)
n-2次元最小多面体

(証明)

今 (n-1)次元において上記が成立すると仮定

その (n-1)次元最小多面体の中心 C' から 任意の頂点 A' までの高と

その (n-1)次元最小多面体の頂点 A' に対峙する底面から C' までの高と

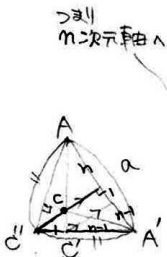
$n-1:1$ になっている。今、この頂点 A' に対峙する底面の重心を C'' とすれば

$A'C' : C'C'' = n-1:1$ といふことが出来る。

さて、この (n-1)次元最小多面体の重心(中心) C' から (この多面体を含む (n-1)次元空間の外へ) 垂線をのびていき、垂線の足の点とこの多面体の任意の頂点との高が、この (n-1次元最小) 多面体の稜の長さ a と一致すれば、その点が n 次元最小多面体を構成する新しい頂点 A となる。このとき三角形 $AA'C'$ を考えると

左図の様になる。 n 次元最小多面体の中心 C は この三角形の重心であり

(2等辺三角形) $A'C' : C'C'' = n-1:1$ に注意すれば $A'C : C'C' = n:1$ となる
// 3.e.d.



(証明その2)

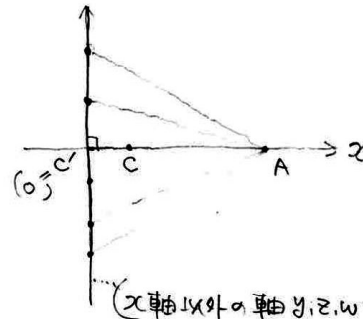
中心(重心)を C とし、また

今、 $n-1$ 次元最小多面体の 任意の頂点 A とし、さらに

A に対峙する底面の $n-2$ 次元最小多面体の中心(重心)を C' とすれば

C は 必ず 線分 AC' 上にある。これを何対何に内分するか考えればよい

今、 $n-1$ 次元デカルト座標の $x, y, z, \dots$ 軸のうち x 軸をこの線 AC' 上の様にとり
原点 O を C' にとる。



(x 軸以外の軸 $y, z, w, \dots$ を含む $n-2$ 次元空間。)

すると A 以外の頂点 A' は 全て $x=0$ の空間にのっている

($n-2$ 次元) ($n-2$ 次元最小多面体となっている)

つまり x 座標に注目すると

A のみが $x_A = \widehat{CA}$ だけ

A 以外の $(n-1)$ 個は 全て $x_i = 0$ 。

である

C は $n-1$ 次元最小多面体の頂点 (n 個) の重心の1つだから

C の x 座標は $x_C = \frac{\widehat{CA}}{n}$

↑ $n-1$ 次元体積を持つ正n面体の頂点は n 個

つまり C は $\widehat{CA}$ を $\widehat{CC} : \widehat{CA} = 1 : n-1$ に内分する

// 3.e.d.