機械システム実験・実習Ⅲ
機械力学（振り子実験） 授業テキストVer.2404

予定
１回目；実験内容の説明（座学50分程度）
＋実験装置組み立て，実験データどり（60分程度）
２回目；実験データどり＋考察（理論値と実測値の差の原因）
３回目；再実験＋レポート作成（添削可能）

レポート作成について

以下の振り子実験の説明資料を読み，以下の構成で，レポートを作成する．

１．実験の背景・目的

２．実験条件

３．実験結果

４．考察

５．参考文献

提出期限；第３回目の講義から１週間後のAM8:50

提出場所；１号館４階レポートBOX

1．実験の背景・目的

背景

「振動現象」は日常的に経験するものであり，動力学では振動学の理解が最も重要である．しかしながら「振動」と一言で表現しても，振動の基本的機構の違いによって振動は様々に分類されるが，今回の実験では最も一般的な線形振動，かつ自由振動を観察し，振動学の基礎を学ぶ.

目的

１）振動現象を計測したオシロスコープの画像から，周期（実測値）を計測する.

２）運動方程式から周期の理論式を導き，周期の理論値を求める.

３）実測値と理論値に違いが発生する理由について考察する.

①角慣性モーメントの修正

②減衰の影響

2．実験条件

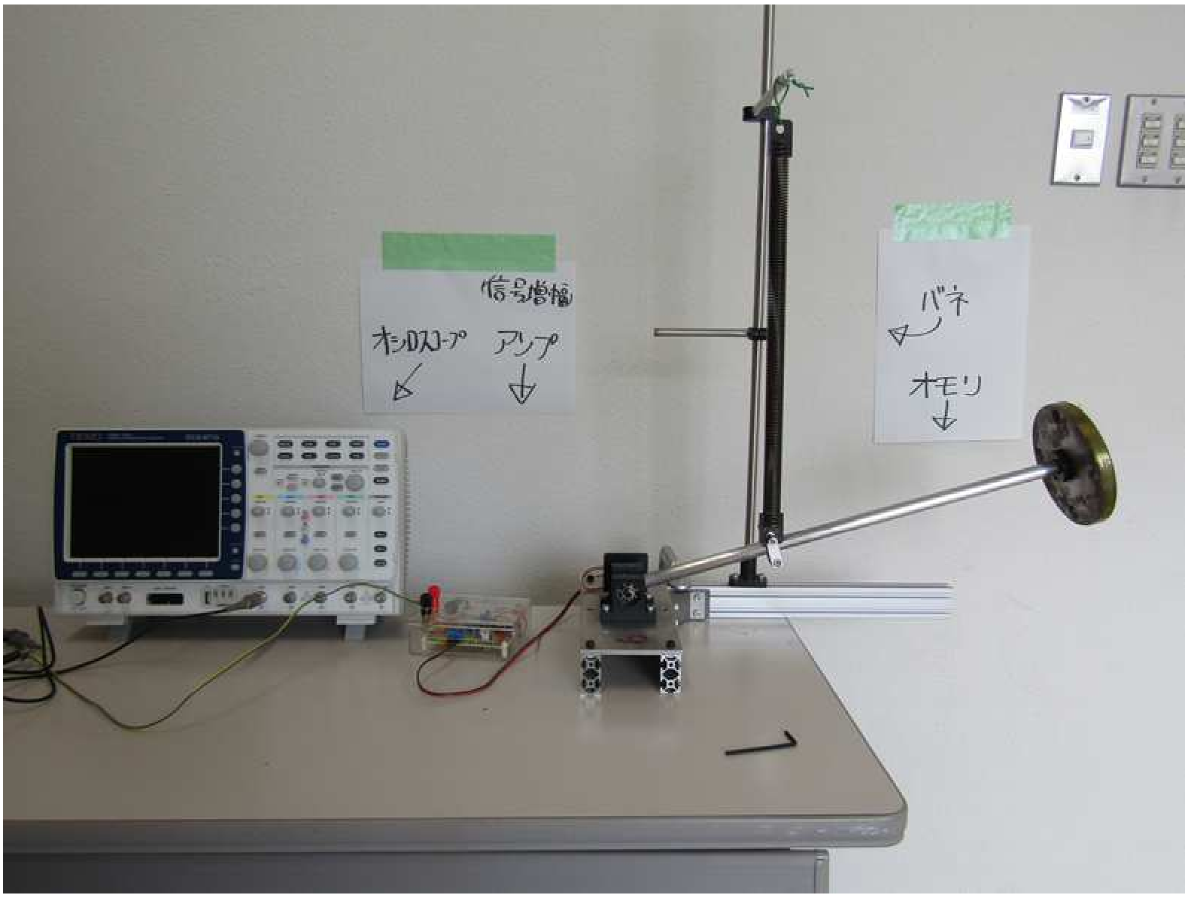
レポートでの記述項目

・実験装置の写真をコピペまたは，図を独自に作成して

説明する.

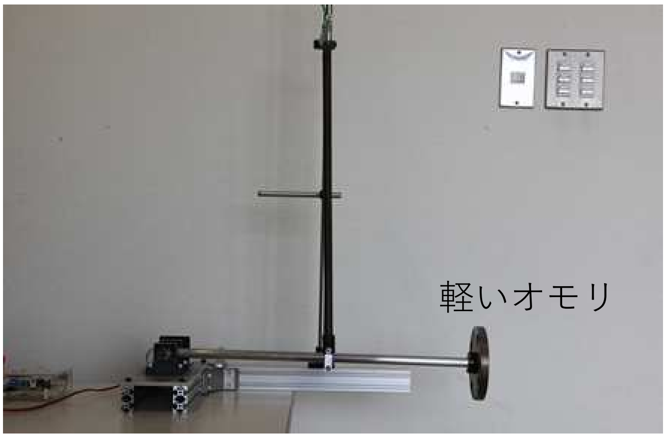
・実験装置での個々の実験条件（アームの長さ，ばね定数）を説明する.

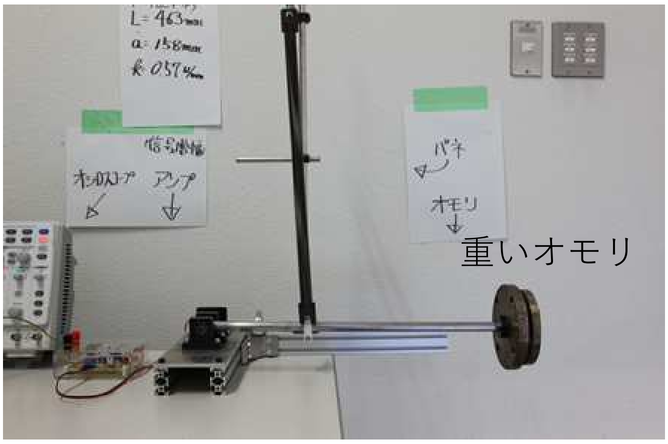
実験装置１（全景）



実験装置２（おもり・バネ・回転軸）

実験条件（２条件）



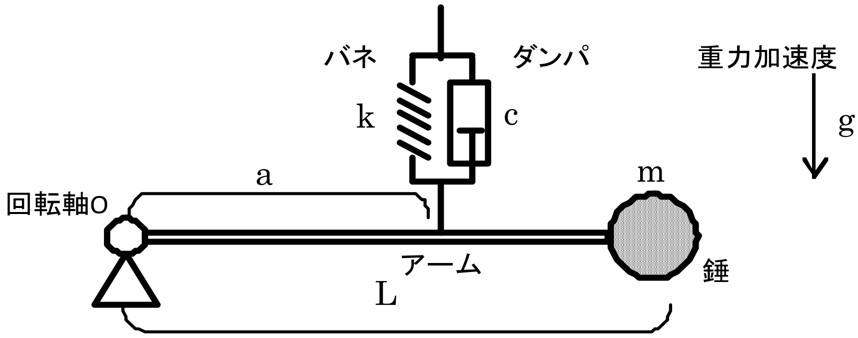


（組み合わせ１）
弱いバネと軽いオモリ

（組み合わせ２）
強いバネと重いオモリ

これを揺らすと、揺れ方に違いがでる

実験条件（２条件）の詳細



組み合わせ１

L=　　mm，a=　　mm，k=0.26N/mm，m=　　kg

組み合わせ２

L=　　mm，a=　　mm，k=0.57N/mm, m=　　kg

注意！
SI単位に換算することを忘れないように！
今回の実験では，図中のダンパは設置していません．

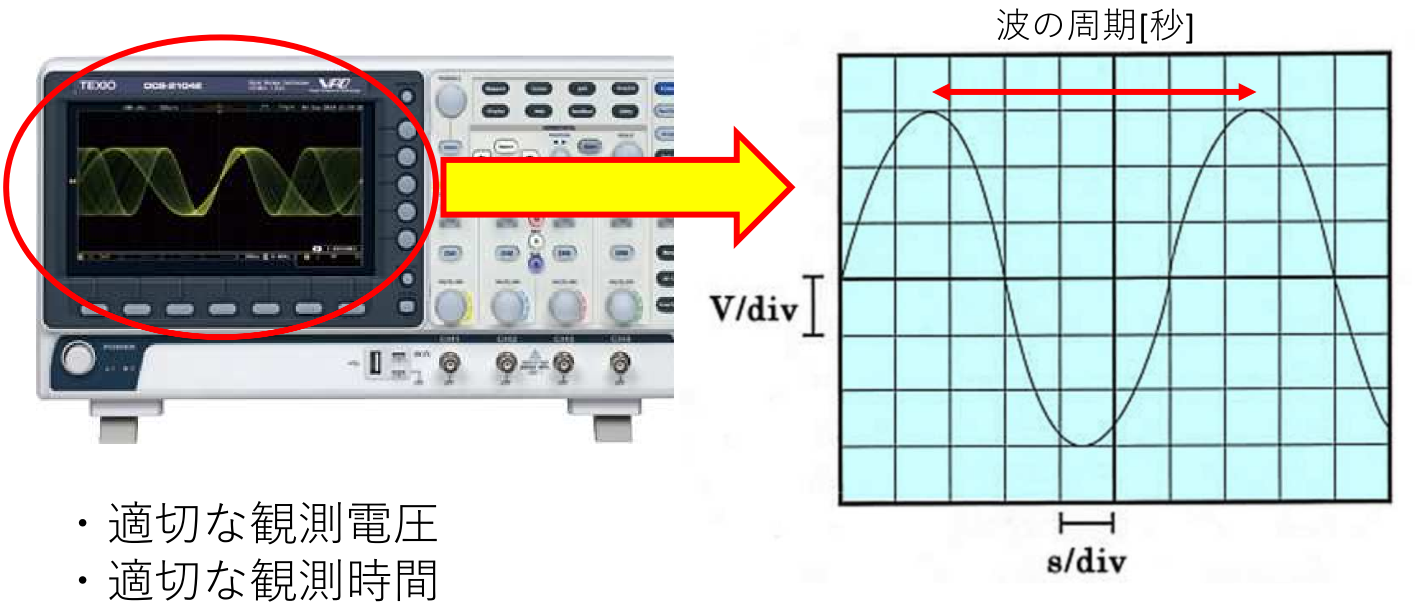
３．実験結果

レポートでの記述項目

・オシロスコープでの波形観測に最適な設定条件について，その理由を説明する．

・２つの組み合わせでの，周期の実測値を，オシロスコープの波形から計測する．

オシロスコープによる波形観測



・適切な観測電圧
・適切な観測時間
を設定する必要がある

今回は**波の周期**を観測したいものとします。

４．考察

レポートでの記述項目

１．周期の理論値を計算する.

２．実測値と理論値を比較し,
　　差が発生する理由について考察する.

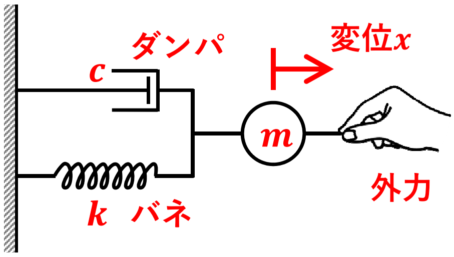
考察１．「周期の理論値の計算」

- 以下の説明資料（ノート部分に詳細な説明あり）を見て,２条件での周期の理論値を計算してください．講義資料３に，今回扱う実験系の運動方程式，固有振動数の導出方法が記載されています.
- なお，今回の実験系での運動方程式から，理論値を導く式（理論式）の導出方法についても，資料を参考にして，説明してください.
- 理論式に代入する，アームの長さ（L, a），ばね定数，オモリの質量は，前述の「実験条件（２条件）の詳細」での値を使用してください.

講義資料１（並進系の運動方程式）

並進系の運動方程式では、力のつり合い式を考える

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=F(t)$$



$$m\frac{d^2x}{dt^2}=m\frac{d}{dt}V=ma$$

変位の二階微分　速度の一階微分

$$c\frac{dx}{dt}=cV$$

速度

速度に応じて変化する減衰力

kx

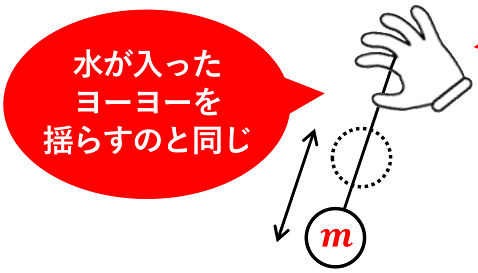
変位

$F(t)$　外部から与えられる力

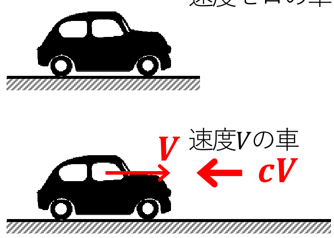
$F(t)=0$　自由振動

$F(t)\neq 0$　強制振動

力入力



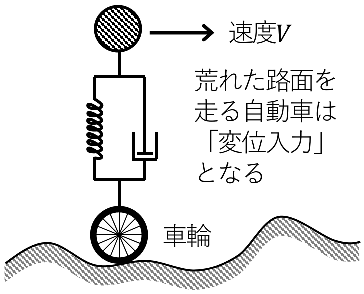
例



速度に応じて（比例した）空気抵抗を受ける

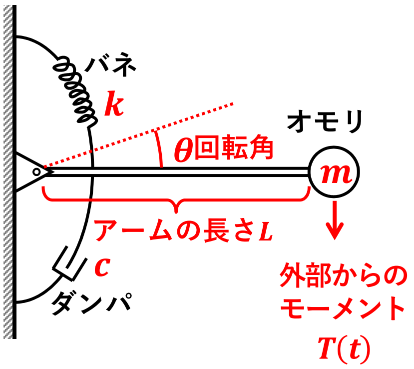
参考

変位入力の例



講義資料２（回転系の運動方程式）

回転系の運動方程式では、モーメントのつり合い式を考える

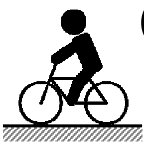


$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}+c\frac{d\theta}{dt}+k\theta=T(t)$$

慣性モーメント　粘性係数　バネ定数　モーメント

慣性モーメント　I

「物体の回転のしにくさ」を意味する

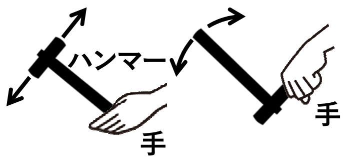


例　自転車の車輪が軽いと加速しやすい

↓

慣性モーメントが小さい

ハンマーの慣性モーメントは？

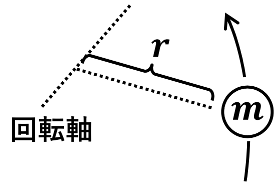


同じ質量のハンマーでも持ち方で振りやすさがちがう

↓

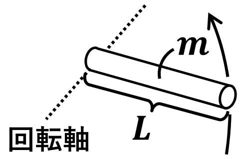
慣性モーメントのちがい

計算式の例



回転軸から半円rの軌道をぐるぐる回る質量m

$$\boxed{I=mr^2}$$

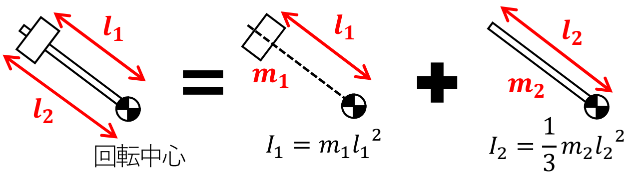


片方の端を回転軸として回転する長さL質量mの棒

$$\boxed{I=\frac{1}{3}mL^2}$$

「考察」でのポイント

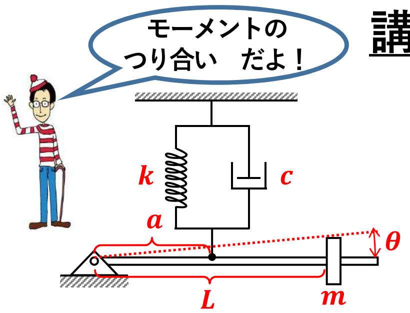
アームの（角）慣性モーメントを考慮する場合のヒント



全体の " I "

$$I=I_1+I_2$$
$$=m_1{l_1}^2+\frac{1}{3}m_2{l_2}^2$$

講義資料３（今回の実験系での運動方程式）

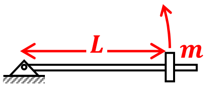


モーメントのつり合い
を考えて式をつくる！

＊ただし、「θは小さい」
という条件をつける！

① 慣性項

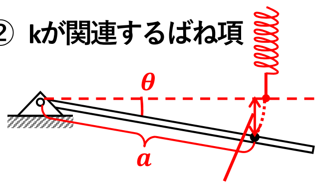
$I\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$



$I = mL^2$　であるので

$mL^2\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

② kが関連するばね項



バネの伸び≒ $a\sin\theta$

バネによって発生する
モーメントは

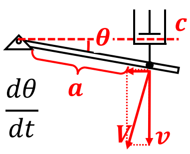
$\underset{\text{半径}}{\underline{a}}\ \underset{\text{バネ定数}}{\underline{k}}\ \underset{\text{バネの伸び}}{\underline{a\sin\theta}} = a^2k\theta$

θが小さいとき

$\sin\theta \fallingdotseq \theta$ なので

③ Cが関連する粘性項

ダンパは速度に応じて抵抗力
を発生する。



速度 $V = a\dfrac{d\theta}{dt}$

上下方向の速度vは

$v = V\cos\theta$

θが小さいので$\cos\theta \fallingdotseq 1$

よって　$\underset{\text{半径}}{\underline{a}} \cdot \underset{\text{ダンパの粘性係数}}{\underline{c}} \cdot \underset{\text{速度}}{\underline{a\dfrac{d\theta}{dt}}} \cdot \cos\theta \fallingdotseq a^2c\dfrac{d\theta}{dt}$

以上より、運動方程式は以下となる。

$$mL^2\frac{d^2\theta}{dt^2} + a^2c\frac{d\theta}{dt} + a^2k\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{a^2c}{mL^2}\dot{\theta} + \frac{a^2k}{mL^2}\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + 2\xi\omega_n\dot{\theta} + \omega_n^2\theta = 0$$

比較する！！
回転系の振動方程式

$\omega_{n^2} = \boxed{}$ $\therefore\ \omega_n = \boxed{}$　固有角速度

$2\xi\omega_n = \dfrac{a^2c}{mL^2}$　$\therefore\ \xi = \dfrac{1}{2}\dfrac{a^2c}{mL^2}\dfrac{L}{a}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

$= \dfrac{ac}{2L\sqrt{mk}}$　減衰（係数）比

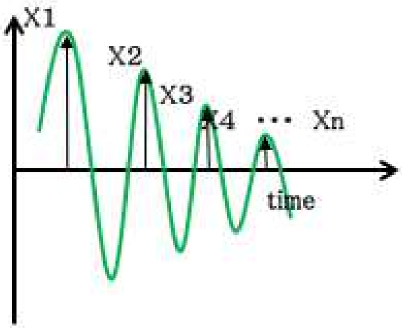
よってT(周期) $= \dfrac{2\pi}{\omega} = \boxed{}$

「考察」でのポイント

以上の式では、アームの質量を無視した慣性
モーメント mL^2 のみを考えている！

注意！
今回の実験では、図中のダンパは設置していません
（粘性項は、考慮しなくてよい）。

参考減衰（係数）比



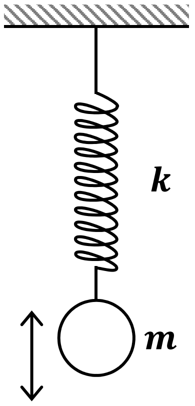
$$\delta = \frac{1}{n}\ln\frac{x_1}{x_{n+1}} \approx 2\pi\xi$$

	正式表記	省略表記	別の表記
自然対数	$\log_e x$	$\log x$	$\ln x$
常用対数	$\log_{10} x$	-	$\log x$
二進対数	$\log_2 x$	-	$\lg x$
指数関数	e^x	-	$\exp x$

自然対数なのか
常用対数なのか
誤解のない文脈で使う

xの式が複雑な時は
こちらを使うべき

講義資料４（周期理論値の計算例）



$k = 0.5\ \text{kgf/mm}$

$m = 2\ \text{kg}$　のとき

T（周期）はいくらか？

公式　$\omega_n = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

単位をSI単位に合わせる！

$$k = 0.5\ \text{kgf/mm}$$

$$= \underbrace{0.5 \times 9.81}_{\text{kgf} \rightarrow \text{N}} \times \underbrace{10^3}_{\text{mm} \rightarrow \text{m}}\ (\text{N/m})$$

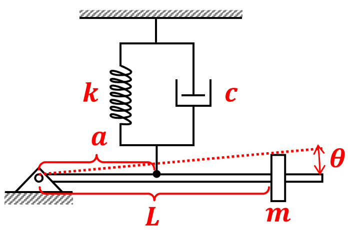
$$= 4.905 \times 10^3\ (\text{N/m})$$

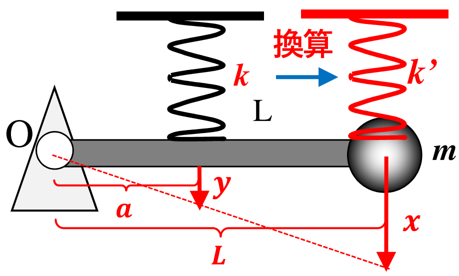
$$\omega_n = \sqrt{\frac{4.905 \times 10^3}{2}}\ (\text{rad/s})$$

$$= 49.52\ (\text{rad/s})$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 0.127(\text{s})$$

【参考】並進運動（ダンパが無い場合のみに適用可能）とした場合の解き方





＊ただし、「θは小さい」という条件をつける！

注意）今回の実験では，ダンパがないため減衰係数Cは考慮せず，ばねの反力のみで定式化する．

- **ステップ1**

幾何学的関係，モーメントのつりあい関係
質量mのおもりの位置に鉛直方向に力を加えたときのおもりの位置での鉛直方向の変位を$\boldsymbol{x}$，距離$\boldsymbol{a}$での鉛直方向の変位を$\boldsymbol{y}$とすると，
幾何学的関係（直角三角形）より

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{L}} = \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}}$$

モーメントのつりあい関係より

$$\boldsymbol{yka} = \boldsymbol{xk'L}$$

- **ステップ2**

仮想ばねのばね定数（$\boldsymbol{k'}$）の計算

上記の幾何学的関係とモーメントのつりあい関係より，仮想ばねのばね定数（$\boldsymbol{k'}$）を既存のばねのばね定数$\boldsymbol{k}$で表すと，

$$\boldsymbol{k'} = \left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{L}}\right)^2 \boldsymbol{k}$$

- **ステップ3**

固有振動数の計算

$$\boldsymbol{\omega_n} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{k'}}{\boldsymbol{m}}} = \boxed{}$$

回転系として扱った場合と同じ結果が得られる

考察２．「周期の理論値と実測値の差と違いの理由」

＃01
オモリの設置位置の測定誤差の考慮
＃02
アームの角慣性モーメントの考慮
＃03
減衰の影響
＃04
これら以外の，理論値と実測値が異なる理由
例）ばね・アーム系から実験システム全体（土台）への振動エネルギーの流出（**土台の振動・共振**）

理論値vs実測値　差異を仮説検証

●理論値（ｼｽﾃﾑを簡易的にモデル化して算出した値）

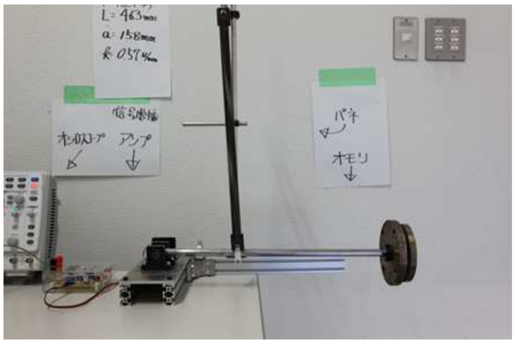
●実測値（実際のｼｽﾃﾑを対象に計測した値）

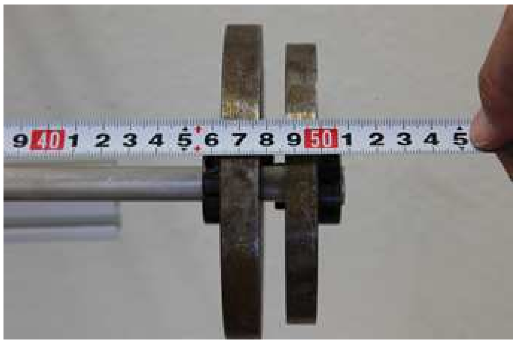
なぜ異なる？→仮説をたて，検証する
→レポートの「考察」※レポート評価で重視

検証のまえに，その仮説では，理論値は実測値よりも大きくなるか・小さくなるべきかを考え，それは仮説に合致するかを確認しておく
例）アームの慣性モーメントの考慮→周期の理論値は？

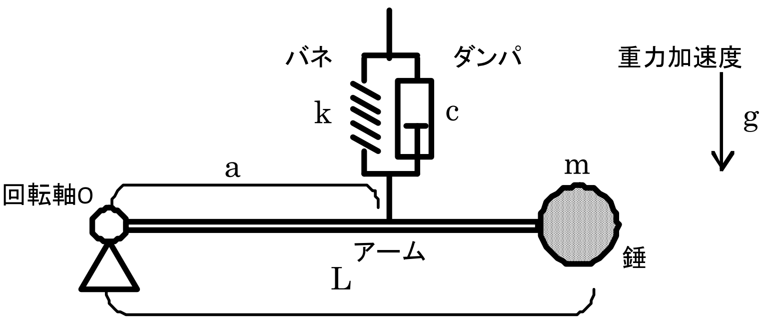
#01オモリの設置位置の測定誤差の考慮

- おもりの設置位置（L）は，図中の内側のおもりの設置位置の左端で計測していた．⇒より外側におもりの重心があるとして，設置位置（L）を補正した場合，理論値と実測値は近づくか，考察する．





#02アームの角慣性モーメントの考慮



- 今回の実験系の運動方程式を導出する際に，おもり（質量m）の角慣性モーメントのみを考慮し，アームの角慣性モーメントを無視している．アームの質量を考慮した場合，理論値と実測値は近づくか？について，考察する．

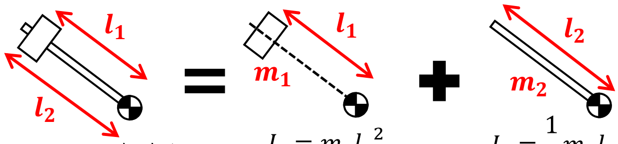
⇒運動方程式における慣性項を上記に合わせて補正する．

講義資料２，講義資料３の赤色の四角で囲った部分を参考にする！

アームの角慣性モーメント

「考察」でのポイント

アームの（角）慣性モーメントを考慮する場合のヒント ➡



$I_1 = m_1 {l_1}^2$ ＋ $I_2 = \frac{1}{3} m_2 {l_2}^2$

全体の " I “

➡ $I = I_1 + I_2$

$= m_1 {l_1}^2 + \frac{1}{3} m_2 {l_2}^2$

＃０３減衰の影響

<u>誤差要因の仮説</u>

減衰の程度が大きいほど，そもそも減衰を想定していない理論式で導出した，周期の理論値と実測値との差が大きい．

検証０１

①減衰の程度（減衰比）を，３～４条件程度設定して，計測する．
→減衰が大きいほど，理論値と実測値の差が大きい．
②周期の理論値と実測値との差をグラフで作成し，上記の仮説を検証する．

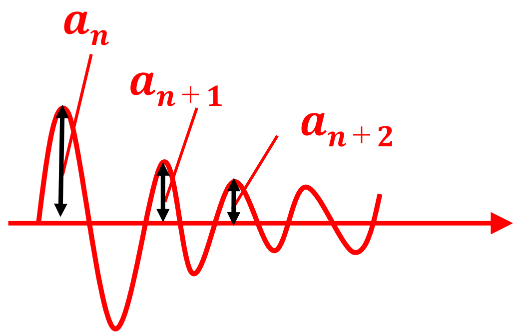
検証０２

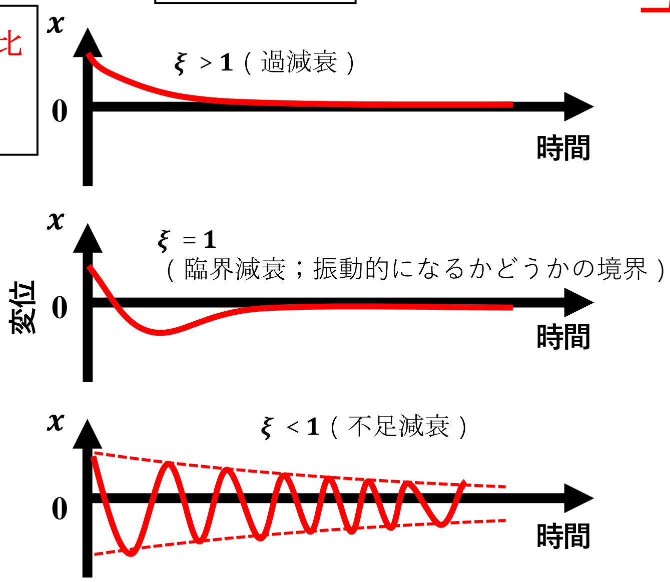
さらに，
①減衰比を実測値の波形から算出する
②その減衰比を基に，周期の理論値を補正する
③上記の②で得られた周期の理論値と実測値を比較し，誤差が小さくなっていることを示す．

減衰比（振動の波形から減衰の程度を表す値）

減衰比 ξ（ｸｻｲ）＝ $\boxed{\dfrac{c}{2\sqrt{mk}}}$　c ＝減衰係数

ξ ＝ 減衰比 $= \dfrac{\delta}{2\pi}$





対数減衰率

$$\delta = ln\frac{a_n}{a_{n+1}} = ln\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}$$

実測可

自然対数

lnA、$log_e A$　同じ意味

減衰する場合の固有振動数の理論式

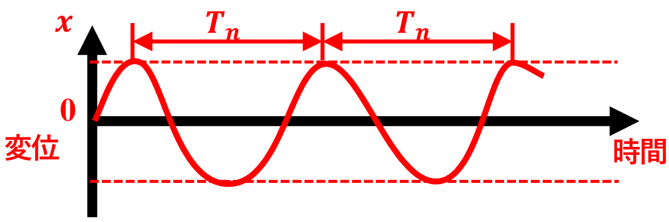
（非減衰）固有振動数　←減衰しない場合の固有振動数（これまでの式）

$md^2x/dt^2 + cdx/dt + kx = 0$　で，$c = 0$ の（ダンパーが無い）時の振動数

ω_n [rad/s] $= \sqrt{k/m}$

f_n [Hz] $= 1/2\pi \cdot \omega_n$

$f_n = \dfrac{1}{T_n}$



減衰固有振動数　←減衰している場合の固有振動数

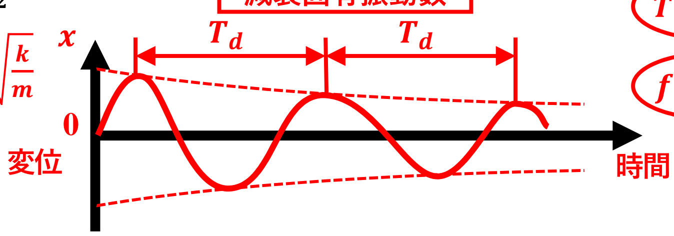
$mdx^2/dt^2 + cdx/dt + kx = 0$　で，$c \neq 0$ の（ダンパーがある）時の振動数

ω_d [rad/s] $= \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$　$\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

f_d [Hz] $= 1/2\pi \cdot \omega_d$

ただし,$\xi = c/2\sqrt{mk}$

$f_d = \dfrac{1}{T_d}$



$T_d \neq T_n$

$f_d \neq f_n$

○ （一自由度）減衰系の運動方程式

ばね定数kのばねと減衰係数cのダンパーに質量mの物体が接続され，
振動しているときの運動方程式は，ニュートンの第二法則（$f=m\alpha$）より，
以下の式で表すことができる．

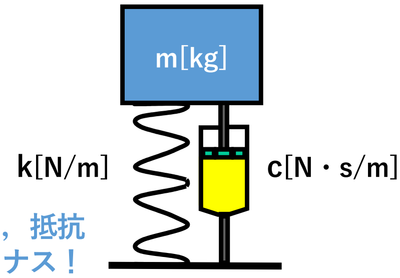
kx：ばねによる抵抗力
cdx/dt：ダンパーによる抵抗力

速度v

$$m\,d^2x/dt^2 = -c\frac{dx}{dt} - kx$$

加速度α

変位の向きと反対方向に，抵抗力が発生するので，マイナス！



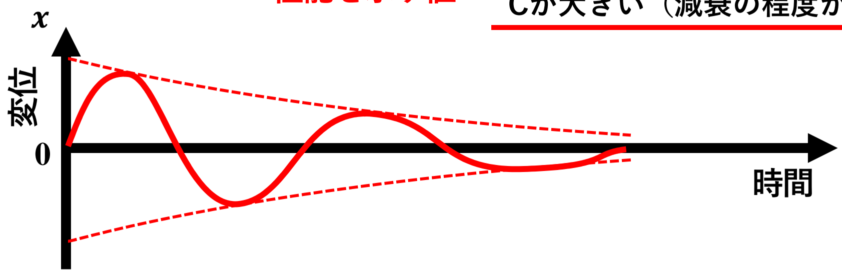
単位に注意！
（SI単位）

$$m\,d^2x/dt^2 + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

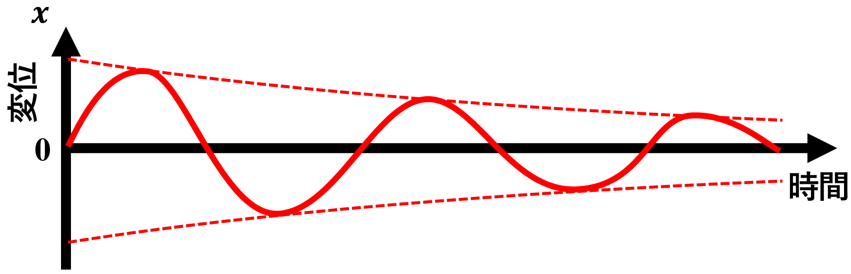
○ 減衰係数;C（ダンパーの諸元の一つで，減衰の程度を表す値）

性能を示す値

Cが大きい（減衰の程度が大きい）



Cが小さい（減衰の程度が小さい）



【参考】

【考察】何の目的で，このグラフを作成しているのか？
仮説検証のため．
では，何の仮説検証なのか？