数学基礎公式集

宮川 勇人

2019 年 11 月 28 日

目次

1　三角関数

$$\sin\theta = \frac{a}{c}, \quad \cos\theta = \frac{b}{c}, \quad \tan\theta = \frac{b}{a}$$

それぞれ　正弦、余弦、正接　という。

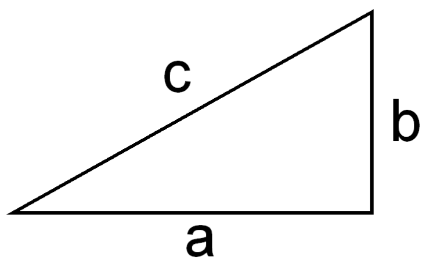


図 1　三角関数の説明の図

$$\mathrm{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta}, \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

それぞれ　余剰、正割、余接　という。

逆関数 (inverse) は

$$\arcsin\theta = \sin^{-1}\theta, \quad \arccos\theta = \cos^{-1}\theta, \quad \arctan\theta = \tan^{-1}\theta$$

1.1　三角関数の性質

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

sin 関数は奇関数 $\sin(-\theta) = -\sin\theta$,　tan 関数も奇関数 $\tan(-\theta) = -\tan\theta$
cos 関数は偶関数 $\cos(-\theta) = \cos\theta$

周期 2π を持つ

$$\sin\theta = \sin(\theta \pm 2\pi n), \quad \cos\theta = \cos(\theta \pm 2\pi n), \quad \tan\theta = \tan(\theta \pm 2\pi n)$$

区間 $[-\pi, \pi]$ に等価な点は 4 つ (符号に注意)

$$-\sin(\pi+\theta) = -\sin(-\theta) = \sin\theta = \sin(\pi-\theta)$$

$$-\cos(\pi+\theta) = \cos(-\theta) = \cos\theta = -\cos(\pi-\theta)$$

$$\tan(\pi+\theta) = -\tan(-\theta) = \tan\theta = -\tan(\pi-\theta)$$

わりと大事な関係

$$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

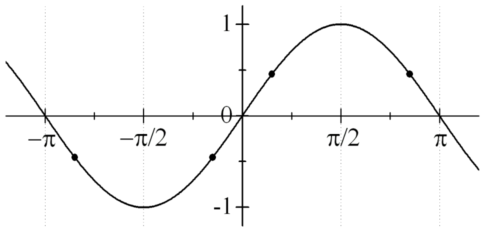


図 2　sin 関数

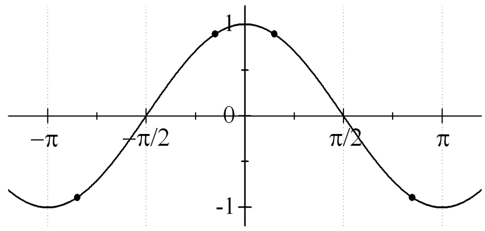


図 3　cos 関数

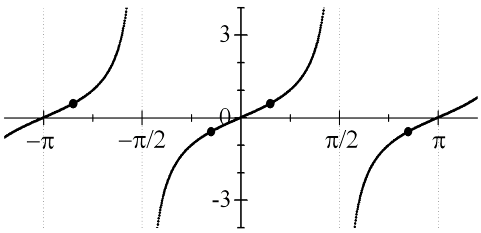


図 4　tan 関数

1.2　三角関数の加法定理

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

1.3　三角関数の合成

基本

$$A\sin\theta + B\cos\theta = \sqrt{A^2+B^2}\,\sin(\theta+\phi)$$

ただし、$\cos\phi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$,　$\sin\phi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$,　$\tan\phi = \frac{B}{A}$

発展その 1 (同周期だが、位相が θ ずれている波の重ね合わせ)

$$A\sin(\omega t) + B\sin(\omega t+\theta) = \sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\theta}\,\sin(\omega t+\phi)$$

ただし、$\cos\phi = \frac{A+B\cos\theta}{\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\theta}}, \quad \sin\phi = \frac{B\sin\theta}{\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\theta}}, \quad \tan\phi = \frac{B\sin\theta}{A+B\cos\theta}$

(証明)

$$\begin{aligned}
&A\sin(\omega t) + B\sin(\omega t+\theta)\\
&= A\sin(\omega t) + B\sin(\omega t)\cos\theta + B\cos(\omega t)\sin\theta\\
&= (A + B\cos\theta)\sin(\omega t) + (B\sin\theta)\cos(\omega t)
\end{aligned}$$

と変形し、上述の合成を使う。(証明終り)

発展その 2 (同周期・同振幅の波の重ね合わせ)

$$\sin(\omega t+\theta) + \sin(\omega t+\phi) = 2\sin\left(\omega t + \frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\sin(\omega t+\theta) - \sin(\omega t+\phi) = 2\cos\left(\omega t + \frac{\theta+\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\cos(\omega t+\theta) + \cos(\omega t+\phi) = 2\cos\left(\omega t + \frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\cos(\omega t+\theta) - \cos(\omega t+\phi) = -2\sin\left(\omega t + \frac{\theta+\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

(証明) $\alpha = \omega t+\theta,\ \beta = \omega t+\phi$ とおけば、

$$\sin(\omega t+\theta) + \sin(\omega t+\phi) = \sin\alpha + \sin\beta$$

さらに、$A = \frac{\alpha+\beta}{2},\ B = \frac{\alpha-\beta}{2}$ とおけば、

$$\begin{aligned}
&\sin\alpha + \sin\beta = \sin(A+B) + \sin(A-B)\\
&= \sin A\cos B + \cos A\sin B + \sin A\cos B - \cos A\sin B\\
&= 2\sin A\cos B = 2\sin\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
&= 2\sin\left(\omega t + \tfrac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\theta-\phi}{2}\right)
\end{aligned}$$

他も同様。(証明終り)

2　対数

log の定義：a を 何乗すれば b になるか

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\ln b}{\ln a}$$

$$a^x = \mathrm{e}^{tx} \quad \text{ただし} \quad t = \ln a$$

3　微積分

3.1　連続性

連続の条件

関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続ならば、

$$^\forall \varepsilon > 0, \quad ^\exists \delta > 0, \quad |x - a| > \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

任意の ε について、ある δ を考えれば、$a - \delta < x < a + \delta$ の範囲で $f(a)$ と $f(x)$ の差は ε 以下である。

一様連続 : $^\forall a \in M$ (M に属する全ての点) について 連続

中間値の定理

$f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続であり $f(a) = \alpha,\ f(b) = \beta$ なら、
$\alpha < \gamma < \beta$ (または逆向き) の γ を $f(c) = \gamma$ で定義できるとき
$a < c < b$ (または逆向き) となる c が存在する

最大値最小値の定理

有界な閉区間で連続関数は最大値と最小値を持つ

ローレ *(Rolle)* の定理

連続した関数 $f(x)$ について、 $f(a) = f(b)$ ならば、

$$^\exists f'(c) = 0 \qquad (a < c < b)$$

「 $x = a, x = b$ で $f(x)$ が同じ値ならば、$[a, b]$ 間に 平らな (傾きがゼロの) 点 C がある」

平均値の定理

C^1 級の関数 $f(x)$ について、

$$f'\left(^\exists c\right) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad (a < c < b)$$

となる c が存在する。

「 座標 $(a,\ f(a))$ と $(b,\ f(b))$ とを直線で結んだとき、$[a, b]$ 間に、この直線と同じ傾きをもつ点 C がある」

コーシー *(Cauchy)* の平均値の定理

C^1 級の関数 $f(x), g(x)$ について、$x = {}^\exists c$ なる点において

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \qquad (a < c < b)$$

が成り立つ。

C^m 級 : 最低 m 回 は微分可能という意味。 C^∞ : 無限に微分可能。

C^2 級 の関数 $f(x, y)$ について

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f$$

が成り立つ。(つまり順番によらない)

3.2 Landau の記号

$\lim_{x \to a} u = 0$ ならば、u を $x \to a$ のときの「無限小」という。

$\lim_{x \to a} \frac{v}{u} = 0$ ならば、v を「 u に対する行為の無限小」といい、$v = o(u)$ と表す。(v は u より速く 0 に近づく)

$\lim_{x \to a} \frac{v}{u} \neq 0$ ならば、v を「 u と同位の無限小」といい、$v = O(u)$ と表す。

3.3 導関数の定義

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

3.4 導関数の諸性質 (1) 〜 ライプニッツ則

$$(c \cdot u)' = c \cdot u'$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u' \cdot v$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u' \cdot v}{v^2}$$

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$$

ライプニッツ *(Leibniz)* の法則

関数 f, g が C^m 級ならば、

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}$$

例

$$(f \cdot g)'' = (f' \cdot g + f \cdot g')' = f'' \cdot g + 2f' \cdot g' + f \cdot g'$$

$$(f \cdot g)^{(3)} = f^{(3)} \cdot g + 3f^{(2)} \cdot g^{(1)} + 3f^{(1)} \cdot g^{(2)} + f \cdot g^{(3)}$$

この展開は二項定理と同じ

ライプニッツは微分法の発展に多大な貢献をした人物で、ニュートンと名を連ねるほど、数学では有名らしい。

3.5　三角関数の微分

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1} x\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right) = \frac{1}{1+x^2}$$

3.6　指数・関数の微分

$$\frac{d}{dx}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$$

$$\frac{d}{dx}a^x = (\ln a)\cdot a^x$$

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\ln f = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}$$

3.7 偏微分と全微分

$f(x, y, \cdots)$ において、変数 $x, y, \cdots$ がそれぞれ独立とする。

偏微分 : そのうちの一つの変数 x のみ動かすときの増加率を表す。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \underbrace{\frac{f(x+\Delta x,\ y, \cdots) - f(x,\ y, \cdots)}{\Delta x}}_{x\ \text{のみパラメータとして扱う}}$$

全微分 : すべての変数が 少しずつ動くときの 増加率は、次のような 偏微分の線形結合で表される

(*Chain rule* とかいうらしい)

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy + \cdots$$

例) x, y, z が パラメータ t で $x(t), y(t), z(t)$ と記述される場合 (つまり、3 次元空間の曲線上を動く場合) は、

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{dz}{dt}$$

注意 : ここで $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ は曲線の接線方向のベクトル (接ベクトル) であり、

大きさは t の変化に対する速度を表す。

接平面の法線ベクトル

曲面 $f(x, y, z) = 0$ 上の点 (a, b, c) における接平面の法線ベクトルは

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial x},\ \ \frac{\partial f(a, b, c)}{\partial y},\ \ \frac{\partial f(a, b, c)}{\partial z}\right)$$

(証明)

その曲面上にあり、点 (a, b, c) を通る曲線をパラメータ t で $(x(t), y(t), z(t))$ と表す。

つまり $f(x(t), y(t), z(t)) = 0$. また、$t = 0$ にて (a, b, c) となるようにする。$x(0) = a$, $y(0) = b$, $z(0) = c$. 全微分を $t = 0$ について考えると

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{dz}{dt} \qquad = 0$$

(曲線上を動く限り t の変化で f は変化しないので この全微分は 0) この式は 接ベクトル と 法線ベクトル が直交していることを証明している。(証明終り)

3.8　導関数の諸性質 (2) 〜 逆関数・陰関数の微分

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

逆関数の微分

条件 $y = f(x)$ を x について解いた逆関数 $x = f^{-1}(y)$ について、
その微分は

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

となる。(つまり陽関数の逆数)

(証明)　$y = f(x)$ を y で微分すれば、$1 = \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$ よって $\frac{df}{dy} = 1/\left(\frac{dy}{dx}\right)$　(証明終り)

パラメータ関数の微分

パラメータ t で陽に表される関数 $x(t), y(t)$ について、x に対する y の変化率は

$$\frac{dy(t)}{dx(t)} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}$$

(証明)　$y(x)$ を t で微分すれば、$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$ よって $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dt}\right)/\left(\frac{dx}{dt}\right)$　(証明終り)

陰関数の微分

条件 $F(x, y) = 0$ を y について解いた陰関数 $y = f_s(x)$ について、その微分は

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)}$$

となる。(負の符号に注意)

(証明)　全微分の式より、$dF = \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)dx + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)dy$　(= 0 : 条件より)
これを x で微分すれば、

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{よって} \quad \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) / \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

(証明終り)

補足 1：逆関数の (高階の) 微分

陽関数 $y = f(x)$ の 逆関数を $x = g(y) \quad \left(= f^{-1}(y)\right)$ とする。
今、陽関数の微分 $f_x(x)$, $f_{xx}(x)$, $f_{xxx}(x)$, $\cdots$ が求まっている時、
逆関数の微分 $g_y(y)$, $g_{yy}(y)$, $g_{yyy}(y)$, $\cdots$ を求める方法を考えてみる。

(以下では、いちいちパラメータ y を用いて記述すると混乱するので、f を y の代わりに使う。)

$$g(f(x)) = x \quad \text{を } x \text{ で微分して} \quad g_f \cdot f_x = 1 \quad (*1)$$

$$\therefore \quad g_f \left(= g_y\right) = \frac{1}{f_x}$$

$(*1)$ を さらに x で微分すると

$$g_{fx} \cdot f_x + g_f \cdot f_{xx} = \left(g_{ff} \cdot f_x\right) \cdot f_x + g_f \cdot f_{xx} = 0$$

$$g_{ff} \cdot (f_x)^2 + g_f \cdot f_{xx} = 0 \qquad (*2)$$

$$g_{ff} \cdot (f_x)^2 + \frac{f_{xx}}{f_x} = 0$$

$$\therefore \quad g_{ff} = -\frac{f_{xx}}{(f_x)^3}$$

$(*2)$ を さらに x で微分して整理すると

$$g_{fff} \cdot (f_x)^3 + 3g_{ff} \cdot (f_x \cdot f_{xx}) + g_f \cdot (f_{xxx}) = 0 \qquad (*3)$$

$$g_{fff} \cdot (f_x)^3 - 3\frac{(f_{xx})^2}{(f_x)^2} + \frac{f_{xxx}}{f_x} = 0$$

$$\therefore \quad g_{fff} = \frac{(f_{xx})^2}{(f_x)^5} - \frac{f_{xxx}}{(f_x)^4}$$

同様に $(*3)$ を微分して整理すると

$$g_{ffff} \cdot (f_x)^4 + 6g_{fff} \cdot \left((f_x)^2 \cdot f_{xx}\right) + g_{ff} \cdot \left(3(f_{xx})^2 + 4f_x \cdot f_{xxx}\right) + g_f \cdot (f_{xxxx}) = 0$$

$$g_{ffff} \cdot (f_x)^4 + 15\frac{(f_{xx})^3}{(f_x)^3} - 10\frac{(f_{xx} \cdot f_{xxx})}{(f_x)^2} + \frac{f_{xxxx}}{f_x} = 0$$

$$\therefore \quad g_{ffff} = -15\frac{(f_{xx})^3}{(f_x)^7} + 10\frac{(f_{xx} \cdot f_{xxx})}{(f_x)^6} - \frac{f_{xxxx}}{(f_x)^5}$$

(規則性はイマイチ不明であるが)
同様にすれば、点 (x, y) における逆関数の (高階の) 微分を
もとの陽関数の微分値を使って (数値的に) 計算することができる

補足 2：陰関数の二階微分

条件 $F(x,y)=0$ により陰に関係づけられた x, y についてその 2 階微分 $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right), \left(\dfrac{d^2x}{dy^2}\right)$ を考える。

(以下 添え字の x, y は 偏微分を表す)
全微分より

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy \quad = \quad F_x\,dx+F_y\,dy \quad = \quad 0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{F_y}{F_x}, \quad \frac{dx}{dy}=-\frac{F_x}{F_y}$$

2 階微分を求めるにあたり、あらかじめ次の計算をしておく。

$$d(F_x)=F_{xx}\,dx+F_{xy}\,dy \quad \text{より} \quad F_{xx}\left(=\frac{\partial F_x}{\partial x}\right)=F_{xx}\ +F_{xy}\,\frac{dy}{dx}$$

$$d\left(F_y\right)=F_{xy}\,dx+F_{yy}\,dy \quad \text{より} \quad F_{yy}\left(=\frac{\partial F_y}{\partial x}\right)=F_{xy}\ +F_{yy}\,\frac{dy}{dx}$$

$$\text{ここで} \quad F_{xy}\ =F_{yx}\left(=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial x}\right) \quad \text{や}$$

$$\frac{dF_x}{dx}\neq F_{xx}, \quad \frac{dF_y}{dx}\neq F_{xy} \quad \text{に、注意する。}$$

さて、実際に 2 階微分を計算すると

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=-\frac{\left(\frac{d}{dx}F_y\right)F_x-F_y\left(\frac{d}{dx}F_y\right)}{(F_x)^2}=\frac{-\left(F_{xy}\ +F_{yy}\,\frac{dy}{dx}\right)F_x+F_y\left(F_{xx}\ +F_{xy}\,\frac{dy}{dx}\right)}{(F_x)^2}$$

$$=\frac{-F_{xy}F_x-F_{yy}\,\frac{dy}{dx}F_x+F_yF_{xx}\ +F_yF_{xy}\,\frac{dy}{dx}}{(F_x)^2}=\frac{-F_{xy}F_x+F_{yy}\,\frac{F_y}{F_x}F_x+F_yF_{xx}\ -F_yF_{xy}\,\frac{F_y}{F_x}}{(F_x)^2}$$

$$=\frac{-F_{xy}F_x+F_{yy}\,F_y+F_yF_{xx}\ -F_yF_{xy}\,\frac{F_y}{F_x}}{(F_x)^2}=\frac{-F_{xy}(F_x)^2+F_{yy}\,F_yF_x+F_yF_{xx}F_x\ -\left(F_y\right)^2F_{xy}}{(F_x)^3}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{F_xF_y\left(F_{xx}+F_{yy}\right)-\left(F_x^2+F_y^2\right)F_{xy}}{F_x^3}$$

x, y は対等な変数なので、同様に $\qquad \dfrac{d^2x}{dy^2}=\dfrac{F_xF_y\left(F_{xx}+F_{yy}\right)-\left(F_x^2+F_y^2\right)F_{xy}}{F_y^3}$

(分母の添え字のみ変化している)

さらに高階の微分も計算できるが、
面倒なので、略！

3.9　曲率と曲率半径

定義

ある曲線の上に基点 O をとる。基点 O から曲線上を 距離 s だけ進んだ位置を 点 P とし、その位置ベクトルを $\vec{r}\,(s)$ とする。

$$\vec{\tau}\,(s) = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

は、距離 s が増えるときの $\mathbf{r}$ の 変化 (率)、即ち 点 P の位置の変化 (=方向) を表している。さらに、$\mathbf{t}$ の変化 (率) は

$$\vec{\chi}\,(s) = \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$$

となるが、この絶対値

$$\chi = \left|\vec{\chi}\,(s)\right| = \left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right| = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| \quad \left(= \frac{1}{R}\right)$$

を 曲率という。さらにこの逆数 R を曲率半径という。

解釈

今、点 P が曲線上を等速で運動するとすれば、$s\,(t) = v_s t$ とかける。(v_s : $const$)
すると速度ベクトルは

$$\vec{v}\,(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = v_s\vec{\tau}$$

加速度ベクトルは

$$\vec{a}\,(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = v_s\frac{d\vec{\tau}}{dt} = v_s\frac{d\vec{\tau}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = v_s^2\vec{\chi}$$

よって $v_s = 1$ のときは、$\vec{v} = \vec{\tau},\ \vec{a} = \vec{\chi}$ となる。つまり

「曲線上を 速度 1 で等速度運動する点が その場所で受ける加速度の大きさ が 曲率」
「その逆数が 曲率半径」

と解釈できる。

参考

(1) ベクトル $\vec{\tau}\,(s) = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$ は その点における 接線方向の単位ベクトルとなる。
(微小変位 ds と dr の大きさは等しいため。$|ds| = |dr|$)

(2) 速度 1 で動く点 P が感じる加速度は、曲率半径 R の曲線上 と 半径 R の球の表面 とで 同じ。

(3) クロソイド曲線
曲率が $\chi = cs$ のように一定の割合で進行距離 (等速ならば経過時間) と共に変化する曲線
この曲線上を等速度運動する点が受ける加速度は一定の割合で徐々に変化する。
車の運転ではスピード一定でハンドルを一定の割合で変化させるときの経路。
(高速道路やジェットコースターで採用されている。コルニュの螺旋もこれに属す。)

二次元平面内の曲線における曲率

陽関数 $y = f(x)$ で与えられる曲線の曲率は

$$\frac{1}{R} = \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{\sqrt{(1 - f')\, f''}}{1 + (f')^2}$$

陰関数 $F(x, y) = 0$ で与えられる曲線の曲率は

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\frac{\left(F_x + F_y\right)\left\{F_x F_y\ \left(F_{xx} + F_{xy}\right) - F_{xy}\left(F_x^2 + F_y^2\right)\right\}}{\left(F_x^2 + F_y^2\right)^2}}$$

(陽関数に関する証明)

曲線上を等速度 $v_c = 1$ で運動する 点 $P(x, y)$ の座標を 時間パラメータ t で表すことを考える。

速度ベクトルは

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$$

なので、その大きさより

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = 1$$

与えられている曲線は $y = f(x)$ と y について陽的だから、$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$ を使って変形し

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 1 \qquad \therefore\ \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2}} \qquad = g(f_x)$$

これは微分方程式であるため、陽的に (解析的に) 解が求まるかどうかは $f(x)$ に依存する。とにかく、この方程式の関係を満たすような

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \quad (= f(x(t))) \end{aligned}$$

は、時間 t によって速度 1 で等速度運動しており加速度は

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

である。この大きさが曲率なので、これを計算すればいいが、その前に準備をする。

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(g) = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d}{dx}(g) = g \cdot \frac{d}{dx}(g) = g \cdot \frac{df}{dx} \cdot \frac{d}{df}(g) = g\ f_x \frac{dg}{df}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2}} f_{xx}\left(-\frac{f_x}{\sqrt{1 + f_x^2}^3}\right) = -\frac{f_x f_{xx}}{(1 + f_x^2)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(g\ f_x\right)=\left(\frac{d}{dt}g\right)f_x+g\left(\frac{d}{dt}f_x\right)$$

$$=\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)f_x+g\left(\frac{dx}{dt}\frac{d}{dx}f_x\right)=\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)f_x+g^2f_{xx}$$

よって曲率の二乗は

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2=\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)(1+f_x)+g^2f_{xx}$$

$$=-\frac{f_xf_{xx}\left(1+f_x\right)}{\left(1+f_x^2\right)^2}+\frac{f_{xx}}{1+f_x^2}=\frac{-f_xf_{xx}\left(1+f_x\right)+\left(1+f_x^2\right)f_{xx}}{\left(1+f_x^2\right)^2}=\frac{-f_xf_{xx}+f_{xx}}{\left(1+f_x^2\right)^2}=\frac{\left(1-f_x\right)f_{xx}}{\left(1+f_x^2\right)^2}$$

このルートが曲率 $1/R$ となる。(証明終り)

(陰関数に関する証明)

上式の

$$\frac{1}{R^2}=\frac{\left(1-f_x\right)f_{xx}}{\left(1+f_x^2\right)^2}=\frac{1-\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

に、(前節で述べた) 陰関数についての微分の式

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_y}{F_x},\qquad\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{F_xF_y\left(F_{xx}+F_{yy}\right)-\left(F_x^2+F_y^2\right)F_{xy}}{F_x^3}$$

を代入すればよい。すると

$$\frac{1}{R^2}=\frac{1+\frac{F_y}{F_x}}{\left(1+\left(\frac{F_y}{F_x}\right)^2\right)^2}\cdot\frac{F_xF_y\left(F_{xx}+F_{yy}\right)-\left(F_x^2+F_y^2\right)F_{xy}}{F_x^3}$$

$$=\frac{F_x+F_y}{\left(F_x^2+F_y^2\right)^2}\left\{F_xF_y\left(F_{xx}+F_{yy}\right)-\left(F_x^2+F_y^2\right)F_{xy}\right\}$$

このルートが曲率となる。(証明終り)

三次元空面内のパラメータ曲線における曲率

曲線の座標が パラメータ λ によって $x = x(\lambda)$, $y = y(\lambda)$, $z = z(\lambda)$ と表される時、
その曲率は

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\frac{\left(x_\lambda^2 + y_\lambda^2 + z_\lambda^2\right)\left(x_{\lambda\lambda}^2 + y_{\lambda\lambda}^2 + z_{\lambda\lambda}^2\right) - (x_\lambda x_{\lambda\lambda} + y_\lambda y_{\lambda\lambda} + z_\lambda z_{\lambda\lambda})^2}{\left(x_\lambda^2 + y_\lambda^2 + z_\lambda^2\right)^3}}$$

(証明)

曲線上を等速度 $v_c = 1$ で運動する 点 $P(x, y, z)$ の座標を 時間パラメータ t で表すことを考える。

$$1 = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \left(\frac{d\lambda}{dt}\right)\sqrt{\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^2}$$

より、微分方程式

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^2}} \quad = \frac{1}{\sqrt{G(\lambda)}} \quad : \quad G(\lambda) \equiv \left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^2$$

を得る。これを満たす $\lambda = \lambda(t)$ にしたがって 点 P が動けばそれは等速運動となる。

ここで、 $x_\lambda = \frac{dx}{d\lambda}, \cdots$ などの表記を使えば、

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{\sqrt{x_\lambda^2 + y_\lambda^2 + z_\lambda^2}} = \frac{1}{\sqrt{G}}, \qquad G = x_\lambda^2 + y_\lambda^2 + z_\lambda^2, \qquad G_\lambda = 2x_\lambda x_{\lambda\lambda} + 2y_\lambda y_{\lambda\lambda} + 2z_\lambda z_{\lambda\lambda}$$

さて、ここで計算準備

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\lambda}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\right) = \frac{d\lambda}{dt} \cdot \left(\frac{d}{d\lambda}\frac{1}{\sqrt{G}}\right) = \frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \left(-\frac{G_\lambda}{2\sqrt{G^3}}\right) = -\frac{G_\lambda}{2G^2} = -\frac{x_\lambda x_{\lambda\lambda} + y_\lambda y_{\lambda\lambda} + z_\lambda z_{\lambda\lambda}}{\left(x_\lambda^2 + y_\lambda^2 + z_\lambda^2\right)^2}$$

これを使えば、

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\lambda}{dt}x_\lambda\right) = \left(\frac{d}{dt}\frac{d\lambda}{dt}\right)x_\lambda + \frac{d\lambda}{dt}\left(\frac{d}{dt}x_\lambda\right) = \frac{d^2\lambda}{dt^2}x_\lambda + \frac{d\lambda}{dt}\left(\frac{d\lambda}{dt}x_{\lambda\lambda}\right) = \frac{d^2\lambda}{dt^2}x_\lambda + \left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 x_{\lambda\lambda}$$

$$= \frac{x_\lambda x_{\lambda\lambda} + y_\lambda y_{\lambda\lambda} + z_\lambda z_{\lambda\lambda}}{\left(x_\lambda^2 + y_\lambda^2 + z_\lambda^2\right)^2}x_\lambda - \frac{x_{\lambda\lambda}}{x_\lambda^2 + y_\lambda^2 + z_\lambda^2} = \frac{(x_\lambda x_{\lambda\lambda} + y_\lambda y_{\lambda\lambda} + z_\lambda z_{\lambda\lambda})\,x_\lambda - \left(x_\lambda^2 + y_\lambda^2 + z_\lambda^2\right)x_{\lambda\lambda}}{\left(x_\lambda^2 + y_\lambda^2 + z_\lambda^2\right)^2} \equiv \frac{Ax_\lambda - Bx_{\lambda\lambda}}{B^2}$$

同様にして、 $\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{Ay_\lambda - By_{\lambda\lambda}}{B^2}, \quad \dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{Az_\lambda - Bz_{\lambda\lambda}}{B^2}$

よって、曲率の二乗は

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2 = \frac{A^2\left(x_\lambda^2 + y_\lambda^2 + y_\lambda^2\right) - 2AB\,(x_\lambda x_{\lambda\lambda} + y_\lambda y_{\lambda\lambda} + z_\lambda z_{\lambda\lambda}) + B^2\left(x_{\lambda\lambda}^2 + y_{\lambda\lambda}^2 + y_{\lambda\lambda}^2\right)}{B^4}$$

$$= \frac{A^2B - 2A^2B + B^2\left(x_{\lambda\lambda}^2 + y_{\lambda\lambda}^2 + y_{\lambda\lambda}^2\right)}{B^4} = \frac{-A^2 + B\left(x_{\lambda\lambda}^2 + y_{\lambda\lambda}^2 + y_{\lambda\lambda}^2\right)}{B^3} = \frac{-(x_\lambda x_{\lambda\lambda} + y_\lambda y_{\lambda\lambda} + z_\lambda z_{\lambda\lambda})^2 + \left(x_\lambda^2 + y_\lambda^2 + z_\lambda^2\right)\left(x_{\lambda\lambda}^2 + y_{\lambda\lambda}^2 + y_{\lambda\lambda}^2\right)}{\left(x_\lambda^2 + y_\lambda^2 + z_\lambda^2\right)^3}$$

(証明終り) これは本当なのだろうか。要確かめ

3.10　不定積分いろいろ (1)

原始関数 $\int f(x)dx$

$$\int (x-a)^n dx = \tfrac{1}{n+1}(x-a)^{n+1} + C \quad \text{ただし} \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x-a}dx = \ln|x-a| + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C$$

$$\int \frac{x}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+a^2\right) + C$$

参考

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

3.11　多項式／多項式 の積分方法

$\displaystyle\int \frac{m\text{ 次の多項式}}{n\text{ 次の多項式}}dx$ の解き方を考える。

積分の中身について、分子の次数 m が 分母の次数 n より大きい場合、割り算をすれば

$$\frac{m\text{ 次多項式}}{n\text{ 次多項式}} = (m-n)\text{ 次多項式} + \frac{\text{余りの }(n-1)\text{ 次 (以下の) 多項式}}{n\text{ 次多項式}}$$

と変形できる。右辺の $(m-n)$ 次多項式 の積分はすぐできるので、問題は第二項の $\dfrac{(n-1)\text{ 次多項式}}{n\text{ 次多項式}}$ の積分に帰着する。(このようにして見通しが良くなる場合もある。)

(i)　$\dfrac{f'}{f}$ **の場合**　この積分はすぐできるので、まず検討すべきである。

$$\int \frac{f'}{f}dx = \ln f + C$$

(i) の例

$$\int \frac{1}{x+1}dx = \ln(x+1) + C$$

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \ln\left|x^2+x+1\right| + C$$

(i') $\dfrac{f'}{f^m}$ の場合 (ただし $m \neq 1$)　　この積分もすぐできる。(見落としがちなので注意！)

$$\int \frac{f'}{f^m} dx \quad = \quad -\frac{1}{(m-1)\ f^{m-1}} + C$$

(i') の例

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx \quad = \quad -\frac{1}{x^2+x+1} + C$$

m は整数でなくでもいい

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx \left(= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(1+x^2)^{1/2}} dx \right) \quad = \quad \sqrt{1+x^2} + C$$

$$\int \frac{x}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3} dx \quad = \quad -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

$$\int \frac{x^2}{\left(\sqrt{1+x^3}\right)^3} dx \quad = \quad -\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} + C$$

（参考）　r を動径ベクトル $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{r} = (x, y, z)$ の大きさ、つまり $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とすれば、

$$\int \frac{x}{r} dx \quad = \quad r + C$$

$$\int \frac{x}{r^3} dx \quad = \quad -\frac{1}{r} + C$$

$$\int \frac{x}{r^4} dx \quad = \quad -\frac{1}{2r^2} + C$$

一般に、

$$\int \frac{x}{r^m} dx \quad = \quad -\frac{1}{(m-2)\, r^{m-2}} + C, \quad (m \neq 2)$$

$$\int \frac{x}{r^2} dx \quad = \quad 2 \ln |r| + C, \quad (m = 2)$$

$m = -n$ とすれば、

$$\int x r^n dx \quad = \quad \frac{1}{n+2} r^{n+2} + C, \quad (n \neq -2)$$

(ii-a)　分母の n 次式が因数分解できる場合：重根のない場合

n 次多項式 $=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$ ならば、適当な係数 a_n を使って、

$$\frac{1}{n\text{ 次多項式}}=\frac{a_1}{x-x_1}+\frac{a_2}{x-x_2}+\cdots+\frac{a_n}{x-x_n}$$

と分解できる (後述の定理参照) ので、

$$\frac{(n-1)\text{ 次多項式}}{n\text{ 次多項式}}=\frac{(n-1)\text{ 次多項式}}{x-x_1}+\frac{(n-1)\text{ 次多項式}}{x-x_2}+\cdots+\frac{(n-1)\text{ 次多項式}}{x-x_n} \qquad (*1)$$

となる。ここで、右辺の各項に注目すると、これは割り算によって

$$\frac{(n-1)\text{ 次多項式}}{x-x_i}=(n-2)\text{ 次多項式}+\frac{c_i}{x-x_i}$$

と変形できる。この $(n-2)$ 次多項式 の積分はすぐできる。また、第二項についても

$$\int\frac{c_i}{x-x_i}dx=c_i\ln(x-x_i)+C$$

のように行うことができる。よって $(*1)$ は積分できる。

(ii-a) の例

$$\int\frac{1}{1-x^2}dx=-\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x-1)+C$$

$$\int\frac{x}{1-x^2}dx=-\frac{1}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\ln(x-1)+C$$

(ii-b)　分母の n 次式が因数分解できる場合：重根のある場合 (一般的だが面倒)

n 次多項式 $=(x-x_1)^{p_1}(x-x_2)^{p_2}\cdots(x-x_n)^{p_n}$ ならば、適当な係数 a_n を使って、

$$\frac{1}{n\text{ 次多項式}}=\sum_{k=1}^{p_1}\frac{a_1}{(x-x_1)^k}+\sum_{k=1}^{p_2}\frac{a_2}{(x-x_2)^k}+\cdots+\sum_{k=1}^{p_n}\frac{a_n}{(x-x_n)^k}$$

と分解できる (後述の定理参照) ので、

$$\frac{(n-1)\text{ 次多項式}}{n\text{ 次多項式}}=a_1\sum_{k=1}^{p_1}\frac{(n-1)\text{ 次多項式}}{(x-x_1)^k}+a_2\sum_{k=1}^{p_2}\frac{(n-1)\text{ 次多項式}}{(x-x_2)^k}+\cdots+a_n\sum_{k=1}^{p_n}\frac{(n-1)\text{ 次多項式}}{(x-x_n)^k} \qquad (*2)$$

となる。ここで、右辺の第 i 項に注目すると、

$$a_i\sum_{j=1}^{p_i}\frac{(n-1)\text{ 次多項式}}{(x-x_i)^j}=a_i\left\{\frac{(n-1)\text{ 次多項式}}{x-x_i}+\frac{(n-1)\text{ 次多項式}}{(x-x_i)^2}+\cdots+\frac{(n-1)\text{ 次多項式}}{(x-x_i)^{p_i}}\right\} \qquad (*3)$$

となっている。さて、ここで $(n-1)$ 次多項式 を $g(x)$ とし、これを Taylor 展開し、適当な係数 b_n を用いて次の様に表記しておく。

$$\begin{aligned}(n-1)\text{ 次多項式}=g(x)&=g(x_i)+g'(x_i)(x-x_i)+\frac{g''(x_i)}{2!}(x-x_i)^2+\cdots+\frac{g^{(n-1)}(x_i)}{(n-1)!}(x-x_i)^{n-1}\\&=b_0+b_1(x-x_i)+b_2(x-x_i)^2+\cdots+b_{n-1}(x-x_i)^{n-1}\end{aligned}$$

すると、$(*3)$ の第 j 項に着目すれば、

$$a_i \frac{(n-1)\text{ 次多項式}}{(x-x_i)^j} = a_i \left\{ \frac{b_0}{(x-x_i)^j} + \frac{b_1}{(x-x_i)^{j-1}} + \cdots + \frac{b_{j-2}}{(x-x_i)^2} + \frac{b_{j-1}}{x-x_i} + b_j + b_{j+1}(x-x_i) + \cdots + b_{n-1}(x-x_i)^{n-1-j} \right\}$$

$(*3)$ は j を $1 \to m_i$ と変化させた和となっているので、まとめると

$$a_i \sum_{j=1}^{m_i} \frac{(n-1)\text{ 次多項式}}{(x-x_i)^j} =$$

$$a_i \left\{ \underbrace{\frac{c_0}{(x-x_i)^{p_i}} + \frac{c_1}{(x-x_i)^{p_i-1}} + \cdots + \frac{c_{p_i-2}}{(x-x_i)^2}}_{group.A} + \frac{c_{p_i-1}}{x-x_i} + \underbrace{c_{p_i} + c_{p_i+1}(x-x_i) + \cdots + c_{n-1}(x-x_i)^{n-2}}_{group.B} \right\}$$

ここで、*group.A* については

$$\int \frac{c_i}{(x-x_i)^p} dx = -\frac{1}{p+1} \frac{c_i}{(x-x_i)^{p+1}} + C$$

を使って積分できるし、中間の項についても

$$\int \frac{c_{p_i-1}}{x-x_i} dx = c_{p_i-1} \ln(x-x_i) + C$$

を使えばよい。最後の *group.B* も容易に積分できる。よって $(*2)$ は積分できる。

(ii-b) の例

$$\int \frac{x^4+2x^3+3x^2+4x+5}{x^3+2x^2-4x-8} dx \qquad = \frac{9}{8}\frac{1}{x+2} + \ln \frac{(x-2)^{\frac{57}{16}}(x+2)^4}{(x+2)^{\frac{9}{16}}} + \frac{19}{2}x$$

$$+\frac{39}{32}(x-2)^2 + \frac{5}{24}(x-2)^3 + \frac{1}{64}(x-2)^4 - \frac{7}{32}(x+2)^2 - \frac{1}{24}(x+2)^3 - \frac{1}{64}(x+2)^4$$

(解法)

分母については $f(x) \equiv x^3+2x^2-4x-8 = (x-2)(x+2)^2$ と因数分解できるので

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{(x+2)^2} \qquad \frac{g(x)}{f(x)} = a\frac{g(x)}{x-2} + b\frac{g(x)}{x+2} + c\frac{g(x)}{(x+2)^2}$$

と分解できる。この係数を求めると、$a = 1/16, \quad b = -1/16, \quad c = -1/4$

分子については

$$\begin{array}{lll} g(x) \equiv x^4+2x^3+3x^2+4x+5 & g(2) = 57 & g(-2) = 9 \\ g'(x) = 4x^3+6x^2+6x+4 & g'(2) = 72 & g'(-2) = -16 \\ g''(x) = 12x^2+12x+6 & g''(2) = 78 & g''(-2) = 30 \\ g'''(x) = 24x+12 & g'''(2) = 60 & g'''(-2) = -12 \\ g''''(x) = 24 & & \end{array}$$

なので、テイラー展開により

$$g(x) = 57 + 72(x-2) + 39(x-2)^2 + 10(x-2)^3 + (x-2)^4$$

$$g(x) = 9 - 16(x+2) + 15(x+2)^2 - 2(x+2)^3 + (x+2)^4$$

(執筆途中です)

(iii) 特殊な場合**:**大事

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \tan^{-1} x + C$$

$$\int \frac{1}{x^3+1}dx \quad : \quad \textit{unknown}$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}dx \quad : \quad \textit{unknown}$$

$$\int \frac{1}{x^3+x^2+x+1}dx = \ln \frac{(x+1)^{1/2}}{(x^2+1)^{1/4}} + \frac{\tan^{-1} x}{2} + C$$

(解法)

$$\frac{1}{x^3+x^2+x+1} = \frac{x-1}{x^4-1} = \frac{x-1}{2}\left\{\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+1}\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right) - \frac{2}{4}\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{2x-2}{x^2+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$$

これを積分すれば、$\frac{1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right) + \frac{1}{2}\tan^{-1} x + C$

多項式分数の分解の定理

多項式の分数 $\frac{1}{f}$ において 分母 f が因数分解できるならば、それらを次のような分数の和に分解できる。

(a) 重根のない場合

$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)} = \frac{a_1}{x-x_1}+\frac{a_2}{x-x_2}+\cdots+\frac{a_n}{x-x_n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{x-x_k}$$

係数 a_k は以下で与えられる。

$$a_k = \frac{1}{(x_k-x_1)(x_k-x_2)\cdots\underbrace{\cancel{(x_k-x_k)}}_{exclude}\cdots(x_k-x_n)} = \frac{1}{\prod_{l=1(l\neq k)}^{n}(x_k-x_l)}$$

例

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{1}{\boldsymbol{(x-a)}(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)\boldsymbol{(x-b)}(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)\boldsymbol{(x-c)}}$$

(b) 重根のある場合

$$\frac{1}{(x-x_1)^{p_1}(x-x_2)^{p_2}\cdots(x-x_n)^{p_n}} = \sum_{l=1}^{p_1}\frac{a_{1,l}}{(x-x_1)^l}+\sum_{l=1}^{p_2}\frac{a_{2,l}}{(x-x_2)^l}+\cdots+\sum_{l=1}^{p_n}\frac{a_{n,l}}{(x-x_n)^l} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p_k}\frac{a_{k,l}}{(x-x_k)^l}$$

これは帰納法によって証明できる (略)。係数 $a_{k,l}$ については複雑なので略。

例

$$\frac{1}{(x-a)^2(x-b)} = \frac{1}{\boldsymbol{(x-a)^2}(a-b)}+\frac{1}{(b-a)\boldsymbol{(x-a)}(a-b)}+\frac{1}{(b-a)^2\boldsymbol{(x-b)}}$$

$$\frac{1}{(x-a)^3(x-b)} = \frac{1}{\boldsymbol{(x-a)^3}(a-b)}+\frac{1}{(b-a)\boldsymbol{(x-a)^2}(a-b)}+\frac{1}{(b-a)^2\boldsymbol{(x-a)}(a-b)}+\frac{1}{(b-a)^3\boldsymbol{(x-b)}}$$

$$\frac{1}{(x-a)^2(x-b)^2} = \frac{1}{\boldsymbol{(x-a)^2}(a-b)^2}+\frac{2}{(b-a)\boldsymbol{(x-a)}(a-b)^2}+\frac{2}{(b-a)^2\boldsymbol{(x-b)}(a-b)}+\frac{1}{(b-a)^2\boldsymbol{(x-b)^2}}$$

$$\frac{1}{(x-a)^2(x-b)(x-c)} = \frac{1}{\boldsymbol{(x-a)^2}(a-b)(a-c)}+\left(\frac{1}{b-a}+\frac{1}{c-a}\right)\frac{1}{\boldsymbol{(x-a)}(a-b)(a-c)}$$
$$+\frac{1}{(b-a)^2\boldsymbol{(x-b)}(b-c)}+\frac{1}{(c-a)^2(c-b)\boldsymbol{(x-c)}}$$

(やればわかる。)

3.12 三角関数の積分

$$\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$$

$$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + C$$

$$\int \tan ax\,dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos ax| + C$$

$$\int \cot ax\,dx = \frac{1}{a}\ln|\sin ax| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 ax}dx = \left(\int \sec^2 ax\,dx\right) = \frac{1}{a}\tan ax + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 ax}dx = \left(\int \mathrm{cosec}^2 ax\,dx\right) = -\frac{1}{a}\cot ax + C$$

発展

$$\int \frac{1}{\cos ax}dx = \left(\int \sec ax\ dx\right) = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{1+\sin ax}{\cos ax}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sin ax}dx = \left(\int \mathrm{cosec}\, ax\ dx\right) = \frac{1}{a}\ln\left|\tan\frac{ax}{2}\right| + C$$

$$\int \ln x\ dx = x\ln x - x + C$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\ dx \quad &= \frac{1}{a}\sin^{-1}x + C \\ &= \frac{1}{a}\cos^{-1}x + C - \pi/2\end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\ dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\ dx = \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2\ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)\right\} + C$$

3.13　置換積分の公式

$a = \phi(\alpha)$ かつ $b = \phi(\beta)$ とする。このとき、以下が成り立つ。

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\cdot\phi'(t)\,dt$$

3.14　部分積分の公式

関数 $f(x)$ と $g(x)$ は、いずれも区間 I 上での C^1 級の関数であるとき、I に属する任意の点 a, b について以下が成り立つ。

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

3.15 不定積分いろいろ (2) 〜 部分積分の応用

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$$

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C$$

$$\int e^x \sin ax \, dx = \frac{e^x}{a^2+1}\left(a^2 \sin x - a\cos x\right) + C$$

$$\int e^x \cos ax \, dx = \frac{e^x}{a^2+1}\left(a \sin x + a^2 \cos x\right) + C$$

$$\int \sin mx \cos nx \, dx = \begin{cases} -\frac{1}{m^2-n^2}(n \sin mx \sin nx + m \cos mx \cos nx) + C & (m \neq n) \\ -\frac{1}{4m}\cos(2mx) + C & (m = n) \end{cases}$$

ちなみに

$$\int \sin mx \cos nx \, dx + \int \cos mx \sin nx \, dx = \int \sin(mx+nx)\, dx = -\frac{1}{m+n}\cos(mx+nx) + C$$

3.16 定積分いろいろ

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\, dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m (x-\beta)^n \, dx = (-1)^n \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

(証明)　n 回 部分積分を適用すればよい

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m (x-\beta)^n \, dx \\
&= (-1)^n \textstyle\int_\alpha^\beta \frac{n}{(m+1)} \cdot \frac{(n-1)}{(m+2)} \cdots \frac{2}{(m+n-1)} \cdot \frac{1}{(m+n)} (x-\alpha)^{m+n} \, dx \\
&= (-1)^n \left[\frac{n}{(m+1)} \cdot \frac{(n-1)}{(m+2)} \cdots \frac{2}{(m+n-1)} \cdot \frac{1}{(m+n)} \frac{(x-\alpha)^{m+n+1}}{(m+n+1)} \right]_\alpha^\beta \\
&= (-1)^n \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}
\end{aligned}$$

(証明終り)

Bete 関数

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$
$$= \frac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p+q-1)!}$$

例

$$B(1,1) = 1 \qquad B(p,1) = B(1,p) = \frac{1}{p}$$
$$B(p,p) = \frac{(p-1)!\,(p-1)!}{(2p-1)!}$$

注意

$$B\left(\frac{1}{n},1\right) = B\left(1,\frac{1}{n}\right) \quad \left(= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[n]{x}}dx = \left[n\,x^{\frac{n-1}{n}}\right]_0^1\right) \quad = n$$

Bete 関数の性質 (1)

q を減らす部分積分 : $B(p,q) = \frac{q-1}{p}B(p+1,q-1)$
p を減らす部分積分 : $B(p,q) = \frac{p-1}{q}B(p-1,q+1)$

Bete 関数の性質 (2)

$$B(p,q) = B(q,p) \qquad \text{(定義式において } y = x-1 \text{ と置換)}$$

$$B(p,q) = \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta d\theta \qquad \text{(定義式において } x = \sin^2\theta \text{ と置換する)}$$

Gamma 関数

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$$
$$= (s-1)!$$

例

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$$

$$\Gamma(2) = \int_0^\infty x e^{-x} dx = 1$$

$$\Gamma(3) = \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = 2$$

$$\Gamma(4) = \int_0^\infty x^3 e^{-x} dx = 6$$

$$\Gamma(5) = \int_0^\infty x^4 e^{-x} dx = 24$$

注意

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

(最後の式の証明)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx$$

$\sqrt{x} = t$ とおけば、$\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t^2}}{t}\,(2t)\,dt = 2\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\,dt$

これを二乗してみると $\displaystyle\left(\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\,dt\right)^2 = \int_{x=-\infty}^\infty \int_{y=-\infty}^\infty e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,dxdy = (*)$

ここで、$z = e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ の xy 平面に平行な' 切り口' は円であり、その半径は $z = e^{-\left(x^2+y^2\right)} = e^{-r^2}$ より $-r^2 = \ln z \quad \therefore r^2 = -\ln z$ で与えられる。

$$(*) = \int_{z=0}^1 \pi r^2 dz = \int_0^1 -\pi \ln z dz = \pi\left[z - z\ln z\right]_0^1 = \pi$$

このルートが求めるべき値である (証明終り)

Gamma 関数の性質 (1)

$$\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$$

Gamma 関数の性質 (2)

$$\Gamma(s) = 2\int_0^\infty e^{-r^2} r^{2s-1} dr = 3\int_0^\infty e^{-r^3} r^{3s-1} dr = \cdots$$

(定義式において $x = r^2, r^3, \cdots$ と置換。同様にして更に高次を計算可能)

Gamma 関数と Bete 関数の関係 (1)

$$B(s,t)=\frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$$

(証明)

$$\Gamma(s)\Gamma(t)=\left(2\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2s-1}dx\right)\left(2\int_0^\infty e^{-y^2}y^{2t-1}dy\right)=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(x^2+y^2\right)}x^{2s-1}y^{2t-1}dxdy$$

これを極座標変換すれば

$$=4\int_{r=0}^\infty\int_{\theta=0}^{\pi/2}\left(e^{-r^2}r^{2(s+t)-1}\cos^{2s-1}\theta\sin^{2t-1}\theta\right)drd\theta=\Gamma(s+t)B(s,t)$$

(証明終り)

Gamma 関数と Bete 関数の関係 (2)

$$\int_0^{\pi/2}\cos^m\theta\sin^n\theta\,d\theta \quad = \quad \frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right) \quad = \quad \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}+\frac{n+1}{2}\right)}$$

ただしここで、

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(n-1+\frac{1}{2}\right)\left(n-2+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}$$

これを使えば、$\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n\theta\,d\theta\left(=\int_0^{\pi/2}\cos^n\theta\,d\theta\right)=\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}$ を計算できる。

例

$$case\,(n=1) \qquad \int_0^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta \quad = \quad \int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta \quad = \quad 1$$

$$case\,(n=2) \qquad \int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\,d\theta \quad = \quad \int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta \quad = \quad \frac{\pi}{4}$$

$$case\,(n=3) \qquad \int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\,d\theta \quad = \quad \int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\,d\theta \quad = \quad \frac{2}{3}$$

フーリエ (Fourier) 解析で使用する積分

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx=\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx=\delta_{nm}\,\pi$$

3.17　座標変換とヤコビアン

２変数の場合

$(u, v) \mapsto (x, y)$ という変数変換の場合、変換後の座標系 $(x(u, v),\ y(u, v))$ における積分はもとのパラメータ (u, v) で次のように表される

$$\iint f(x, y)\, dxdy = \iint f(x(u, v),\ y(u, v))\, |J|\, dudv$$

ここで、$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \left(= \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)$ をヤコビアン (*Jacobian*) といい、$|J|$ をヤコビ行列式 という。

(考察)

x, y の全微分を考えると、

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) du + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right) dv \qquad dy = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) du + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right) dv$$

これは座標変換における変換前後のパラメータ (u, v) , (u, v) が 微小領域 では線形に結合していることを意味している。つまり、$dxdy$ で囲まれる領域は変換前の座標系で見ると平行四辺形となっている (図参照)。その面積はベクトル dx, dy の外積の大きさとなる。

$$\left| \overrightarrow{dx} \times \overrightarrow{dy} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{vmatrix}$$

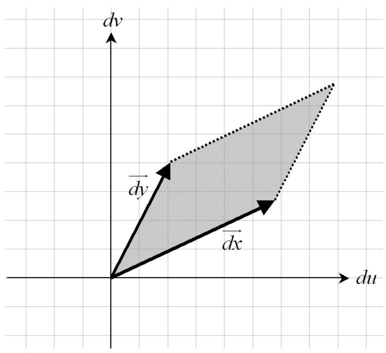


図 5　座標変換 〜 微小領域

３変数の場合

$(u, v, w) \mapsto (x, y, z)$ という座標変換の場合、変換後の座標系 $(x(u, v, w),\ y(u, v, w),\ z(u, v, w))$ における積分はもとのパラメータ (u, v, w) で次のように表される。

$$\iint f\ dxdydz = \iint f\ |J|\ dudvdw$$

ただし、ヤコビアン J は

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix} \quad \left(= \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right)$$

多変数の場合

同様に拡張すれば、多変数の座標変換におけるヤコビアンが定義できる。

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \cdots \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \quad \left(= \frac{\partial (x, y, \cdots)}{\partial (u, v, \cdots)} \right)$$

(考察)

x, y, z の全微分を考えると、

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) du + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right) dv + \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right) dv \qquad dy = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) du + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right) dv + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right) dv$$

２変数の場合と同様に dx, dy, dz は du, dv, dw と線形結合している。よって 変換前の座標系における 微小体積 $dxdydz$ は 平行六面体であり、その体積は次の**スカラー三重積**で表される

$$\left(\overrightarrow{dx}, \overrightarrow{dy}, \overrightarrow{dz}\right) \equiv \left(\overrightarrow{dx} \times \overrightarrow{dy}\right) \cdot \overrightarrow{dz} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

座標変換における偏微分 (大事)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial w} + \cdots \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial}{\partial w} + \cdots \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial}{\partial w} + \cdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

(証明)

まず、f を $u, v, w \cdots$ の関数と考え、全微分をとり、各項の $du, dv, dw \cdots$ について $x, y, z \cdots$ の全微分を適用する。

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv + \frac{\partial f}{\partial w} dw + \cdots$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \cdots\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz + \cdots\right) + \frac{\partial f}{\partial w}\left(\frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz + \cdots\right) + \cdots$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} + \cdots\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} + \cdots\right) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z} + \cdots\right) dz + \cdots$$

これは、f を $x, y, z \cdots$ の関数と考えた全微分

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \cdots$$

と一致するはずなので、係数の比較をすれば OK。

円筒座標（二次元極座標）

$$x = r\cos\varphi \qquad r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \text{ただし、}$$

$$y = r\sin\varphi \qquad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

$$(z = z)$$

偏微分は、

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varphi} = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \varphi} = \sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

ヤコビアンは、

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = r$$

ラプラシアンは、

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \left(+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi^2} \quad \left(+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

極座標（三次元極座標）

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$x = r\sin\theta\cos\phi \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) \qquad \text{ただし、} \; 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \; 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi$$

$$z = r\cos\theta \qquad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

偏微分は、

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\phi} = \sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\phi} = \sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\phi} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

ヤコビアンは、

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = r^2\sin\theta$$

ラプラシアンは、

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

(特に、極座標に関しては計算量が多いが頻出なので、ここに簡単に導出方法を示す。)

まず、$\dfrac{\partial r}{\partial x}, \dfrac{\partial \theta}{\partial x}, \dfrac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial r}{\partial y}, \dfrac{\partial \theta}{\partial y}, \dfrac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial r}{\partial z}, \dfrac{\partial \theta}{\partial z}, \dfrac{\partial \phi}{\partial z}$ を用意するために、

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad \tan^2\theta = \frac{x^2 + y^2}{z^2}, \qquad \tan\phi = \frac{y}{x}$$

を それぞれ x, y, z で偏微分し、整理すると、ヤコビ行列式 J

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial r}{\partial y} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} & \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial r}{\partial z} & \dfrac{\partial \theta}{\partial z} & \dfrac{\partial \phi}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \dfrac{\cos\theta\cos\phi}{r} & -\dfrac{\sin\phi}{r\sin\theta} \\[2ex] \sin\theta\sin\phi & \dfrac{\cos\theta\sin\phi}{r} & \dfrac{\cos\phi}{r\sin\theta} \\[2ex] \cos\theta & -\dfrac{\sin\theta}{r} & 0 \end{bmatrix}$$

が得られる。後はひたすら計算すれば OK。

4　極値問題

4.1　二変数陽曲面

$f(x,y)$ について、その値を z 軸にとれば、それは 3 次元空間における「陽の」曲面 (xy 方向に広がった面) ととらえることができる。いま 微小変位 $\Delta x,\ \Delta y$ について 2 次の近似式を考えると

$$\begin{aligned} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta x) &= f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y \\ &+ \frac{1}{2}\left\{ f_{xx}(x_0,y_0)(\Delta x)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(\Delta x)(\Delta y) + f_{yy}(x_0,y_0)(\Delta y)^2 \right\} \qquad (*) \end{aligned}$$

この 1 次の項は、その点における接平面を形成している。

二変数陽曲面の接平面について

2 変数曲面 $z=f(x,y)$ 上の点 (x,y) における接平面の

$$x\text{ 方向の傾き}:f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$y\text{ 方向の傾き}:f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\text{法線ベクトル}:\overrightarrow{n} = \frac{1}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}}\left(-f_x,\ -f_y,\quad 1 \right)$$

$$\text{水平方向}:\left(f_y,\ -f_x,\quad 0 \right)$$

$$\text{最大傾き方向}:\left(f_x,\quad f_y,\quad f_x^2+f_y^2 \right)$$

$$\text{最大傾き}:\ \sqrt{f_x^2+f_y^2}$$

(導出)

$\overrightarrow{a} = (\Delta x, 0, f_x\Delta x)$, $\overrightarrow{b} = \left(0, \Delta y, f_y\Delta y\right)$ とおけば、接平面上の点はパラメータ α,β を用いて、$\overrightarrow{p} = \alpha\cdot\overrightarrow{a} + \beta\cdot\overrightarrow{b}$ と表すことができる。

法線ベクトルはこれに垂直なので、外積と平行。

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \Delta x & 0 & f_x\Delta x \\ 0 & \Delta y & f_y\Delta y \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -f_x\Delta x\Delta y \\ -f_y\Delta x\Delta y \\ \Delta x\Delta y \end{pmatrix} \quad // \quad \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

水平方向については $\alpha\cdot\overrightarrow{a} + \beta\cdot\overrightarrow{b}$ の z 成分が 0 のはずだから、$\alpha f_x\Delta x + \beta f_y\Delta y = 0$ より $(\alpha\Delta x, \beta\Delta y, 0) = \left(f_y\Delta y\Delta x, -f_x\Delta x\Delta y, 0\right)$。また、最大傾きの方向はこの方向と直交するので、内積を 0 とするようにとれば、$\left(f_x, f_y, C\right)$。全微分の式から $C = f_x f_x + f_y f_y$ が求まる。 (導出終り)

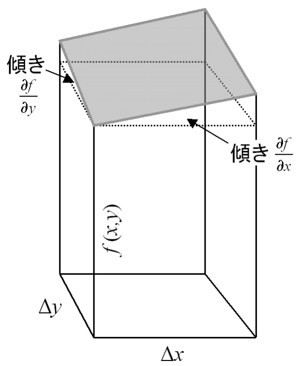


図 6　接平面

4.2 ヘッセの判別式

多変数関数の極大極小を知りたいとき、ヘッセの公式が使える。

二変数の場合

前節の式 $(*)$ において、f_x, f_y が共に 0 ならば、1 次の項が 0 となり、接平面が (xy 平面と) 水平となる。この場合 その点が 陽曲面の 極大もしくは極小点 となっている可能性があり、それは二次の項が 微小変位 $\Delta x,\ \Delta y$ でどう変化するかに依存する。
つまり、

$$\begin{aligned} A &\equiv f_{xx}(x_0, y_0) \\ B &\equiv f_{xy}(x_0, y_0) \\ C &\equiv f_{yy}(x_0, y_0) \\ X &\equiv \Delta x, \quad Y \equiv \Delta y \end{aligned}$$

とおいて、

$$\begin{aligned} F(X, Y) &= f_{xx}(x_0, y_0)(\Delta x)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(\Delta x)(\Delta y) + f_{yy}(x_0, y_0)(\Delta y)^2 \\ &= A\,X^2 + 2B\,XY + C\,Y^2 \end{aligned}$$

これが X, Y についてどう変化するか調べればよい。

(i) $D = AC - B^2 < 0$ ならば、因数分解できて

$$F = A(X - \alpha Y)(X - \beta Y)$$

この場合、2 本の直線 $Y = X/\alpha$ と $Y = X/\beta$ 上では F は 0 だが、それ以外の点において F を正にしたり負にしたりする点が必ず存在する。
よって、元の陽曲面 f は (点 (x_0, y_0) において) 極小・極大にはなりえない。

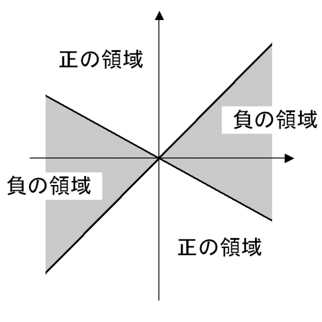


図 7　因数分解できるときの F の正負の例

(ii) $D = AC - B^2 = 0$ のときは、

$$F = A(X - \alpha Y)^2$$

と因数分解できる。この場合、直線 $Y = X/\alpha$ 以外の点では (A の符号に応じて) F は正もしくは負のどちらか となる。しかし、直線上では ゼロとなる。よって、元の陽曲面 f の挙動は更に高次の近似項を (この直線上について) 調べなければわからない。

(iii) $D = AC - B^2 > 0$ のときは因数分解できない。つまり、$(X, Y) = (0, 0)$ 以外の点で

A が正 (この時 C も必ず正) ならば $F > 0 \rightarrow f$ は極小
A が負 (この時 C も必ず負) ならば $F < 0 \rightarrow f$ は極大

二元ヘッセ行列 *(Hessian)*

2 変数関数 $f(x, y)$ の 点 (x_0, y_0) における極大・極小の判別は、

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

と定義されるヘッセ行列についての行列式 (判別式)

$$\det\left[H_f(x_0, y_0)\right] = \left[f_{xx} f_{yy} - f_{yx}^2\right]_{x_0, y_0}$$

によって

(i) $\det\left[H_f(x_0, y_0)\right] < 0$ の場合

極値ではなく、鞍点。

(ii) $\det\left[H_f(x_0, y_0)\right] = 0$ の場合

これだけではわからない。

(iii) $\det\left[H_f(x_0, y_0)\right] > 0$ の場合

(iii-1) $f_{xx} > 0$ ならば 極小

(iii-2) $f_{xx} < 0$ ならば 極大

となる。

ヘッセ行列と固有値

与えられた二次式 F は H_f を ベクトル (X, Y) ではさんだ形となっている。

$$A\,X^2 + 2B\,XY + C\,Y^2 = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} H_f \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

いま、判別式 $\det\left|H_f\right| \leq 0$ ならば 固有値 λ, μ が存在し、

$$H_f \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \qquad H_f \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

と書ける。即ち

$$H_f \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad H_f T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} T \quad \Leftrightarrow \quad T^{-1} H_f\, T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

(注意)

これを、直交行列 $T = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ による対角化という。

H_f が対称行列 $(H_f^t = H_f)$ であるために、$T^t = T^{-1}$ となっている。

$$\left(\because\ T^{-1} H_f\, T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}^t = \left(T^{-1} H_f\, T\right)^t = T^t H_f^t \left(T^{-1}\right)^t = T^t H_f \left(T^{-1}\right)^t \quad \text{：最左辺と最右辺を比較}\right)$$

よって T による変数変換 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ を考えると、

$$T^{-1}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad T^{t}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix}$$

さて、もとの二次式は

$$H = T \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} T^{-1} \text{を使って、}$$

$$\begin{aligned} F &= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} H_f \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} T^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda u^2 + \mu v^2 \end{aligned}$$

つまり F は H_f の固有値 λ, μ が

共に正なら極小
共に負なら極小
積 $\lambda\mu$ が負なら極値ではない

となる。これは多変数に拡張することができる。

多元ヘッセ行列 *(Hessian)*

多変数関数 $f(x, y, z, \cdots)$ の 点 $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0, \cdots)$ における極大・極小の判別は、

$$H_f(\mathbf{r}_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(\mathbf{r}_0) & f_{xy}(\mathbf{r}_0) & f_{xz}(\mathbf{r}_0) & \cdots \\ f_{yx}(\mathbf{r}_0) & f_{yy}(\mathbf{r}_0) & f_{yz}(\mathbf{r}_0) & \\ f_{zx}(\mathbf{r}_0) & f_{zy}(\mathbf{r}_0) & f_{zz}(\mathbf{r}_0) & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

と定義されるヘッセ行列の固有値が

(i) 全て正 の場合

f は $\mathbf{r}_0$ で極小値をとる。

(ii) 全て負 の場合

f は $\mathbf{r}_0$ で極大値をとる。

(iii) 正であったり負であったりする の場合

f は $\mathbf{r}_0$ で極値ではない。

(iv) 上記以外の場合

これだけではわからない。

となる。

5　級数

5.1　数列

数列 a_n について、

$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$: 狭義の単調増加

$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots$: 広義の単調増加

(単調減少についても同様)

収束条件

数列 a_n が収束する必要十分条件は、

$$^\forall\varepsilon > 0, \quad ^\exists N > 0, \quad n > N \to |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

任意の ε について、ある N を考えれば、N より大きい n で a_n と α（極限値）の差は ε 以下である。

***Cauchy* 列**

数列 a_n について

$$^\forall\varepsilon > 0, \quad ^\exists N > 0, \quad ^\forall p, ^\forall q > N$$

$$\left|a_p - a_q\right| < \varepsilon$$

となるような N が存在するならば、この a_n を Cauchy 列 と呼ぶ。

Cauchy 列は収束する

***Cauchy* の判定法 : 極限条件**

$f(x)$ において $\lim_{x\to a} f(x)$ が存在するための必要十分条件は、

$$^\forall\varepsilon > 0, \quad ^\exists\delta > 0, \quad 0 < |\alpha - a| < \delta, \quad 0 < |\beta - b| < \delta$$

$$\to |f(\alpha) - f(\beta)| < \varepsilon$$

ロピタル *(L'Hopital)* の定理

$f(x)$ について、$f(a) = g(a) = 0$ のとき、

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c \text{ となる } c \text{ が存在するならば、} \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = c$$

これは $f(a) = g(a)$ が ∞ についての場合も成り立つ。

5.2　極限

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(\cos x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\cos(\log x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +0} x^x = 1 \qquad \lim_{x \to +0} x \ln x = 0$$

(証明)
$f = \ln x^x = x \ln x$ とおく。 $t = 1/x$ とおけば $f = \frac{\ln(1/t)}{t} = -\frac{\ln t}{t}$
さて、$x \to +0$ の時、$t \to \infty$ なので、このときの $\frac{\ln t}{t}$ を調べればよい。分子の $\ln t$ は、t が充分大きいときは $\ln t < \sqrt{t}$ なので $\frac{\ln t}{t} < \frac{1}{\sqrt{t}}$ がいえる。(この証明は略) よって、$\lim_{t \to \infty} \frac{\ln t}{t} < \lim_{t \to \infty} \frac{1}{\sqrt{t}} = 0$ つまり $\lim_{x \to +0} f = 0$ となる。$\ln x^x$ が 0 に近づくということは x^x は 1 に近づくということである。
(証明終り)

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{e^{tx} - 1} = \frac{1}{t}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{a^x - 1} = \frac{1}{\ln a}$$

5.3 テイラー展開

a 周りの展開

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + R_{n+1}$$

ただし、

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(b-a))}{n!}(b-a)^{n+1}, \quad (0 < \theta < 1)$$

マクローリン展開 (0 周りの展開)

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}$$

ただし、

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}x^{n+1}, \quad (0 < \theta < 1)$$

微分記号の導入

次のような微分演算子 (微分作用素) の記号が使われることがある。

$$D_x^i \equiv x^i \frac{\partial^i}{\partial x^i} = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{i} \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdots \frac{\partial}{\partial x}}_{i}$$

$$D_y^j \equiv y^j \frac{\partial^j}{\partial y^j} = \underbrace{y \cdot y \cdots y}_{j} \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \cdots \frac{\partial}{\partial y}}_{j}$$

性質

$$D_x^i D_x^j = D_x^{i+j} \qquad D_y^i D_y^j = D_y^{i+j}$$

$$D_x^i D_y^j = D_y^j D_x^i \equiv x^i y^j \frac{\partial^i}{\partial x^i} \frac{\partial^j}{\partial y^j} = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{i} \cdot \underbrace{y \cdot y \cdots y}_{j} \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdots \frac{\partial}{\partial x}}_{i} \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \cdots \frac{\partial}{\partial y}}_{j}$$

微分記号を使って 0 点周りの展開 を書くと、

$$f(x) = f(0) + x\frac{\partial}{\partial x} f(0) + \frac{x^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(0) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} f(0)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} D_x^n f(0)$$

2 変数の場合 (その 1) これは頻出

$$f(x,y) = f(0,0) + \left[x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right] f(0,0) + \frac{1}{2!}\left[x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} + y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right] f(0,0)$$

$$+\frac{1}{3!}\left[x^3\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3x^2y\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial y} + 3xy^2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + y^3\frac{\partial^3}{\partial y^3}\right] f(0,0) + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\left(D_x + D_y\right)^n\right] f(0,0)$$

2 変数の場合 (その 2)

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{\partial^n f(0,y)}{\partial x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!} \frac{\partial^m}{\partial y^m} f(0,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^n y^m}{n!m!} \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} f(0,0)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n!m!} D_x^n D_y^m f(0,0)$$

多変数の場合

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[(D_{x_1} + D_{x_2} + \cdots D_{x_i})^n\right] f(0,0,\cdots,0)$$

$$= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_i=0}^{\infty} \frac{1}{n_1! n_2! \cdots n_i!} D_{x_1}^{n_1} D_{x_2}^{n_2} \cdots D_{x_i}^{n_i} f(0,0,\cdots,0)$$

参考：無限級数和の性質

2 変数の場合は、

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\alpha+\beta)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{n!m!}\alpha^n\beta^m$$

多変数の場合は、

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\omega)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\cdots\sum_{\omega=0}^{\infty}\frac{1}{n!m!\cdots w!}\alpha^n\beta^m\cdots\omega^w$$

が成り立つ。

(2 変数の場合の証明) 二項定理より

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\alpha+\beta)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\alpha^k\beta^{n-k}\right)$$

$$\begin{aligned}
&=1 && (case:n=0)\\
&+(\alpha+\beta) && (case:n=1)\\
&+\left(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\right) && (case:n=2)\\
&+\left(\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3\right) && (case:n=3)\\
&+\quad\cdots
\end{aligned}$$

今、項 $\alpha^a\beta^b$ について考えると、その次数 a,b は 0 から ∞ まで続くことがわかる。そこで与式 を $\sum_{a=0}^{\infty}\sum_{b=0}^{\infty}C_{a,b}\,\alpha^a\beta^b$ と置けば、その係数 $C_{a,b}$ は上式より $k=a$ かつ $n-k=b$ のときの係数であり、それは $n=a+b$ の $case$ でしかでてこない。即ち、

$$C_{a,b}=\frac{1}{(a+b)!}\frac{(a+b)!}{a!b!}=\frac{1}{a!b!}$$

(証明終り)

5.4 級数展開 (多項式近似)

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\cdots$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots\qquad(-1<x)$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}+\cdots\qquad(-1<x)$$

5.5 オイラーの公式

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

5.6 ラウエ関数

回折現象を考える際に必要な公式

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) + i\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$$
$$= 1 + e^{ix} + e^{2ix} + \cdots + e^{nix}$$
$$= \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(nx + \frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + i\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(nx + \frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

すなわち、

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = 1 + \cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx)$$
$$= \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(nx + \frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin\left(nx + \frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + 1\right\}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = 0 + \sin x + \sin(2x) + \cdots + \sin(nx)$$
$$= \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(nx + \frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = -\frac{1}{2}\left\{\frac{\cos\left(nx + \frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right\}$$

また、

$$\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right)^2 = \frac{\sin^2\left\{\frac{x}{2}(n+1)\right\}}{\sin^2\left\{\frac{x}{2}\right\}}$$

最後の式で n が十分大きければ、$\left\{\dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}n\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right\}^2$ に比例する。これをラウエ (*Laue*) 関数という。

(証明)

$S \equiv 1 + e^{ix} + e^{2ix} + \cdots + e^{nx}$ とおけば、$e^{ix}S = e^{ix} + e^{2ix} + \cdots + e^{nx} + e^{(n+1)ix}$ より

$$\left(e^{ix} - 1\right)S = e^{(n+1)ix} - 1$$
$$\therefore \quad S = \frac{e^{(n+1)ix} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{nix}e^{ix} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{nix}e^{ix/2} - e^{-ix/2}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}}$$
$$= \frac{(\cos nx + i\sin nx)\left(\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}\right) - \left(\cos\frac{x}{2} - i\sin\frac{x}{2}\right)}{\left(\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}\right) - \left(\cos\frac{x}{2} - i\sin\frac{x}{2}\right)}$$
$$= \frac{\left(\cos nx\cos\frac{x}{2} - \sin nx\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right) + i\left(\sin nx\cos\frac{x}{2} + \cos nx\sin\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)}{2i\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\cos\left(nx+\frac{x}{2}\right)-\cos\frac{x}{2}}{2i\sin\frac{x}{2}} + \frac{\sin\left(nx+\frac{x}{2}\right)+\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} \quad = \quad \frac{\sin\frac{x}{2}+\sin\left(nx+\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}} + i\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(nx+\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$$

また、$\sum\limits_{k=0}^{n}\cos(kx)$, $\sum\limits_{k=0}^{n}\sin(kx)$ については、上式の実部と虚部に相当していることから直ちに求まる。

二乗に関しては、

$$\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right)^2 \quad = \left\{\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\left(nx+\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right\}^2 + \left\{\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\cos\left(nx+\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right\}^2$$

$$= \frac{\left\{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(nx+\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(nx+\frac{x}{2}\right)\right\}+\left\{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(nx+\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(nx+\frac{x}{2}\right)\right\}}{4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{2-2\cos(nx+x)}{4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-\cos(nx+x)}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-\cos^2\left(\frac{nx+x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{nx+x}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\sin^2\left(\frac{nx+x}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin^2\left(\frac{nx+x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

($\sum\limits_{k=0}^{n}\cos(kx)$, $\sum\limits_{k=0}^{n}\sin(kx)$ について別の方法で求める方法を以下に示す。)

$$S_1 \equiv \sum_{k=0}^{n}\cos(kx) = 1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx = \frac{1+e^0}{2}+\frac{e^{-ix}+e^{ix}}{2}+\frac{e^{-2ix}+e^{2ix}}{2}+\cdots+\frac{e^{-nix}+e^{nix}}{2}$$

$$(2S_1-1) = e^{-nix}+\cdots+e^{-ix}+e^0+e^{ix}+\cdots e^{nix}$$

$$e^{ix}(2S_1-1) = e^{-(n-1)ix}+\cdots+e^{(n+1)ix}$$

$$2S_1-1 = \frac{e^{(n+1)ix}-e^{-nix}}{e^{ix}-1} = \frac{e^{nix}e^{ix/2}-e^{-nix}e^{-ix/2}}{e^{ix/2}-e^{-ix/2}} = \frac{\sin\left(nx+\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \qquad \therefore S_1 = \frac{\sin\left(nx+\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}+\frac{1}{2}$$

$$S_2 \equiv \sum_{k=0}^{n}\sin(kx) = \sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx = \frac{-e^{-ix}+e^{ix}}{2i}+\frac{-e^{-2ix}+e^{2ix}}{2i}+\cdots+\frac{-e^{-nix}+e^{nix}}{2i}$$

$$(2iS_2) = \left(-e^{-nix}-\cdots-e^{-ix}\right)+\left(e^{ix}+\cdots+e^{nix}\right)$$

$$e^{ix}(2iS_2) = \left(-e^{-(n-1)ix}-\cdots-e^{0}\right)+\left(e^{2ix}+\cdots+e^{(n+1)ix}\right)$$

$$(2iS_2) = \frac{e^{(n+1)ix}-e^{ix}-e^0+e^{-nix}}{e^{ix}-1} = \frac{e^{(n+1)ix}+e^{-nix}}{e^{ix}-1}-\frac{e^{ix}+e^0}{e^{ix}-1} = \frac{e^{nix}e^{ix/2}+e^{-nix}e^{-ix/2}}{e^{ix/2}-e^{-ix/2}}-\frac{e^{ix/2}+e^{-ix/2}}{e^{ix/2}-e^{-ix/2}}$$

$$= \frac{\cos\left(nx+\frac{x}{2}\right)}{i\sin\left(\frac{x}{2}\right)}-\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{i\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \qquad \therefore S_2 = -\frac{\cos\left(nx+\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}+\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

(証明終り)

5.7 双曲線関数 *hyperbolic sin, hyperbolic cos, hyperbolic tan*

双曲線関数

定義

$$\sinh x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x \equiv \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

三角関数同様に cosech x , sech x , coth x が定義される。

級数展開

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots \qquad = i \sin ix \quad , \qquad \sinh ix = i \sin x$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots \qquad = \cos ix \quad , \qquad \cosh ix = \cos x$$

$$e^x = \cosh x + \sinh x = \cos ix + i \sin ix$$

$$e^{-x} = \cosh x - \sinh x = \cos ix - i \sin ix$$

性質

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

微分してもマイナスはつかない

$$(\sinh x)' = \cosh x \qquad (\cosh x)' = \sinh x$$

加法定理にもマイナスはでてこない

$$\sinh(\alpha + \beta) = \sinh\alpha \cosh\beta + \cosh\alpha \sinh\beta$$

$$\cosh(\alpha + \beta) = \cosh\alpha \cosh\beta + \sinh\alpha \sinh\beta$$

逆双曲線関数

$$\mathrm{arcsinh}\, x = \sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

$$\mathrm{arccosh}\, x = \cosh^{-1} x = \pm \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

参考

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \mathrm{arcsinh}\, x + C$$

オイラーの定理 との関係

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^x = \cosh x + \sinh x$$

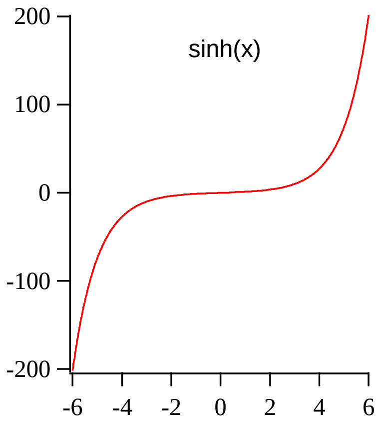


図 8　sinh 関数

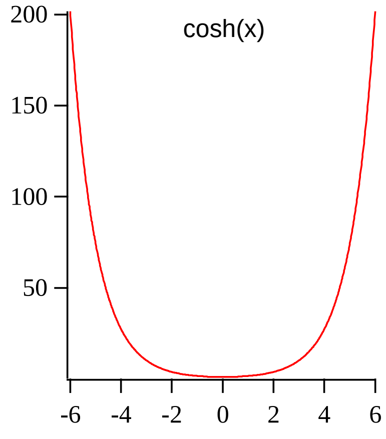


図 9　cosh 関数

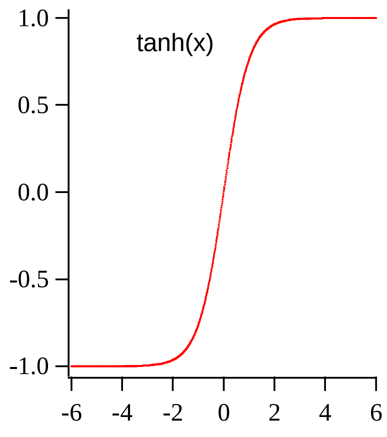


図 10　tanh 関数

対数三角関数

定義

$$\mathrm{sinl}\,x \equiv \frac{-\ln(1-x) - \ln(1+x)}{2} = \ln\sqrt{\frac{1}{1-x}} + \ln\sqrt{\frac{1}{1+x}}$$

$$\mathrm{cosl}\,x \equiv \frac{-\ln(1-x) + \ln(1+x)}{2} = \ln\sqrt{\frac{1}{1-x}} - \ln\sqrt{\frac{1}{1+x}}$$

$$\mathrm{tanl}\,xx \equiv \frac{\mathrm{sinl}\,x}{\mathrm{cosl}\,x} = \frac{-\ln(1-x) - \ln(1+x)}{-\ln(1-x) + \ln(1+x)} = \frac{\ln\sqrt{\frac{1}{1-x}} + \ln\sqrt{\frac{1}{1+x}}}{\ln\sqrt{\frac{1}{1-x}} - \ln\sqrt{\frac{1}{1+x}}}$$

級数展開

$$\mathrm{sinl}\,x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \cdots \qquad = \int \left(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots\right) dx = \int \frac{1}{1-x^2} dx$$

$$\mathrm{cosl}\,x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{8} + \cdots \qquad = \int \left(x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots\right) dx = \int \frac{x}{1-x^2} dx$$

$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \mathrm{sinl}\,x + \mathrm{cosl}\,x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad = \int \frac{1}{1-x} dx$$

性質：微分すると公比数列の和になる

$$(\mathrm{sinl}x)' = \frac{1}{1-x^2} \qquad (\mathrm{cosl}x)' = \frac{x}{1-x^2}$$

$$(\mathrm{sinl}x + \mathrm{cosl})' = \frac{1+x}{1-x^2} = \frac{1}{1-x}$$

$$\mathrm{cosl}^2\mathrm{x} - \mathrm{sinl}^2\mathrm{x} = ?$$

ログボリック関数 (おそらく、あまり三角関数との関連はない)

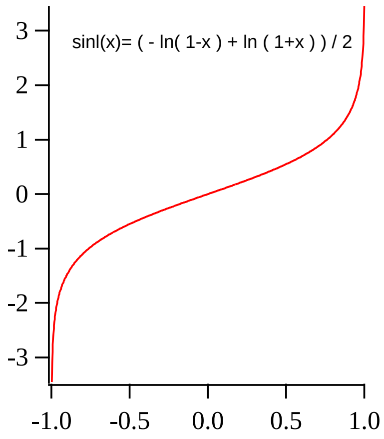


図 11　sinl 関数

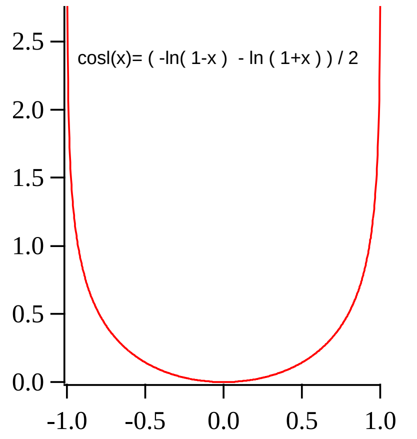


図 12　cosl 関数

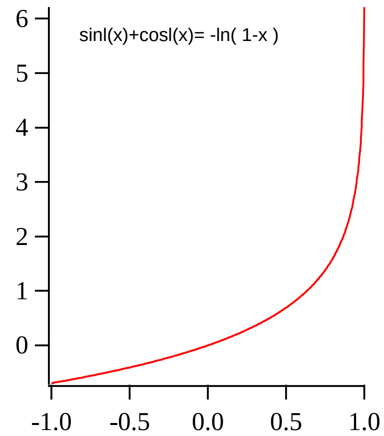


図 13　sinl 関数と cosl 関数の和

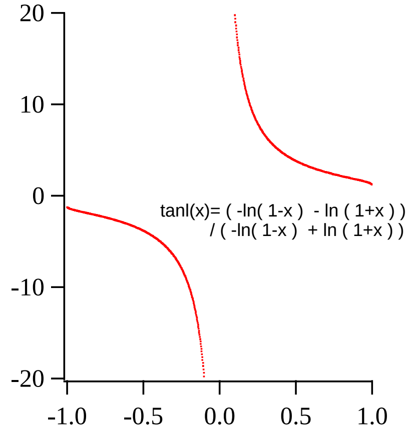


図 14　tanl 関数

5.8　数列の和

等差数列：初項 a_0, 公差 d

$$a_n = a_0 + (n-1)\,d, \quad S_n = \frac{n}{2}(a_0 + a_n) = na + \frac{n(n-1)}{2}d$$

等比数列：初項 a_0, 公比 r

$$a_n = a_0 r^{n-1}, \quad S_n = a_0 \frac{1-r^n}{1-r} \quad (r \neq 1)$$

応用：$a_n = nr^n$

$$S_n = r + 2r^2 + 3r^3 + 4r^4 + \cdots nr^n$$

$$= \frac{r}{(1-r)^2}\left\{1-(n+1)\,r^n + nr^{n+1}\right\}$$

(証明)

$rS_n = r^2 + 2r^3 + 3r^4 + 4r^5 + \cdots + (n-1)\,r^n + nr^{n+1}$
$S_n - rS_n = r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + \cdots + r^n - nr^{n+1}$
$= r\frac{1-r^n}{1-r} - nr^{n+1}$
$= \frac{r}{1-r}\{1 - r^n - n(1-r)\,r^n\}$
$= \frac{r}{1-r}\left\{1 - r^n - nr^n + nr^{n+1}\right\}$

よって、$(1-r)\,S_n = \frac{r}{1-r}\left\{1-(1+n)\,r^n + nr^{n+1}\right\}$
(証明終り)

級数和の基礎

$$\sum r = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum r^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum r^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

$$\sum r(r+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2), \quad \sum r(r+1)(r+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

(証明)

$$r(r+1)(r+2) = \frac{1}{4}\{-(r-1)\,r(r+2)(r+2) + r(r+1)(r+2)(r+3)\}$$

(証明終り)

$$\sum \frac{1}{r(r+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

5.9 無限級数

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots \quad \left(= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right) \quad = \quad \frac{\pi^2}{6}$$

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots + \frac{1}{odd^2} + \cdots \quad \left(= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\right) \quad = \quad \frac{\pi^2}{8}$$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{8^2} + \cdots + \frac{1}{even^2} + \cdots \quad \left(= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}\right) \quad = \quad \frac{\pi^2}{24}$$

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{8^2} + \cdots + \cdots \quad \left(= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right) \quad = \quad \frac{\pi^2}{12}$$

(これらは フーリエ級数展開によって求まる)

6　複素数

6.1　複素数の和・積

6.2　複素関数

$$f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$$

正則関数 : 微分可能な複素関数

$$f'(z) = \lim_{z_0 \to z} \frac{f(z_0) - f(z)}{z_0 - z}$$

で定義される導関数が経路に依らず一定。

コーシー・リーマン方程式

正則関数である必要充分条件は、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

で与えられる。これをコーシー・リーマンの方程式という。

$\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big/\dfrac{\partial v}{\partial y} = 1,\ \dfrac{\partial v}{\partial x}\Big/\dfrac{\partial u}{\partial y} = -1$ とした方が覚え易い気もする。

7　フーリエ級数・フーリエ積分

7.1　フーリエ級数

フーリエ級数展開

周期 $2L$ をもつ関数 $f(x)$ について、以下が成立。

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\cdot 2\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$b_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\cdot 2\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

意味：周期関数 $f(x)$ は、同じ周期を持つ三角関数 (cos と sin) の和として表すことができる

偶関数は cos 関数の和で、 奇関数は sin 関数の和で 表される

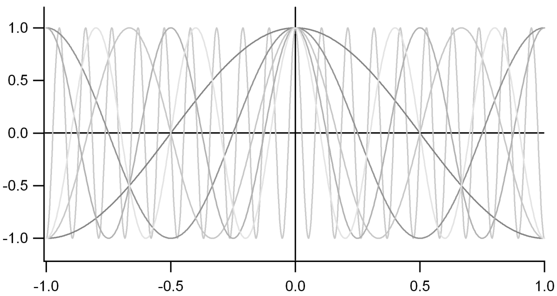


図 15　周期 $2L/n$ の cos 関数たち

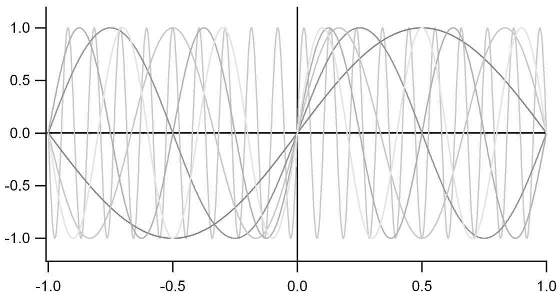


図 16　周期 $2L/n$ の sin 関数たち

(証明)　 $f(x)$ の式を、a_0, a_n, b_n の式に代入すれば OK　 (証明終り)
ただし、途中で次の公式を用いる

三角関数の周期範囲の積分公式:大事

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx = 2\pi$$

単に周期範囲で積分すれば **区間の長さ=周期** になる (当然)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x\, dx = 0$$

三角関数そのままを周期範囲で積分すると ゼロになる

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cdot \sin x\, dx = 0$$

cos と sin を掛け合わせても ゼロになる

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx\, dx = 0$$

波 (の周期) が異なるものを掛け合わせても ゼロになる

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cdot \cos x\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cdot \sin x\, dx = \pi$$

同一の波を掛け合わせたときだけ、**周期の長さの半分** の値になる

まとめると、

$$\int_{-L}^{L} \cos \frac{m\pi x}{L} \cdot \sin \frac{m\pi x}{L}\, dx = 0$$

$$\int_{-L}^{L} \cos \frac{m\pi x}{L} \cdot \cos \frac{m\pi x}{L}\, dx = \int_{-L}^{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \cdot \sin \frac{m\pi x}{L}\, dx = \begin{cases} L\ (m = n) \\ 0\ (m \neq n) \end{cases}$$

(証明その 1) ～ 石井先生の配布プリント

フーリエ級数（周期が 2L の場合）

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)dx\ ,\quad a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,\quad b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

（参考）三角関数の積分の性質

$n=0,1,2,3\ldots$の時

1. $$\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\begin{cases}2L & (n=0)\\ 0 & (n\neq 0)\end{cases}$$
2. $$\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx=0$$

$m=1,2,3\ldots,\ n=1,2,3\ldots$の時

3. $$\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx=0$$
4. $$\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\begin{cases}L & (m=n)\\ 0 & (m\neq n)\end{cases}$$
5. $$\int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx=\begin{cases}L & (m=n)\\ 0 & (m\neq n)\end{cases}$$

（参考を導くための参考）

$$\cos\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}=\frac{1}{2}\left\{\sin\frac{(n+m)\pi x}{L}+\sin\frac{(n-m)\pi x}{L}\right\}$$

$$\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}=\frac{1}{2}\left\{\cos\frac{(m+n)\pi x}{L}+\cos\frac{(m-n)\pi x}{L}\right\}$$

$$\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2n\pi x}{L}+1\right)$$

$$\sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}=-\frac{1}{2}\left\{\cos\frac{(m+n)\pi x}{L}-\cos\frac{(m-n)\pi x}{L}\right\}$$

$$\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}=-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2n\pi x}{L}-1\right)$$

（さらに基本）高校の復習

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

(証明その 2)

$$\int \cos(nx+mx)\,dx = \int \cos nx \cos mx dx - \int \sin nx \sin mx dx$$

これを $[-\pi, \pi]$ で積分すれば、

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx - \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx \qquad \cdots (1)$$

さて一方、

$$\begin{aligned}\int \cos nx \cos mx dx &= \int \frac{(\sin nx)'}{n} \cdot \cos mx dx \\ &= \left[\frac{\sin nx}{n} \cdot \cos mx\right] - \int \frac{\sin nx}{n} \cdot (\cos mx)'\,dx \\ &= \left[\frac{\sin nx}{n} \cdot \cos mx\right] + \frac{m}{n} \int \sin nx \sin mx dx\end{aligned}$$

これを $[-\pi, \pi]$ で積分すれば、

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \frac{m}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx \qquad \cdots (2)$$

(1)(2) が成立するのは、

$$n = m \qquad \text{もしくは} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = 0$$

n = m の場合は

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx = \pi$$

(グラフ参照)

cos の 2 乗は、平均して 0.5 の高さ→積分値は積分範囲の半分

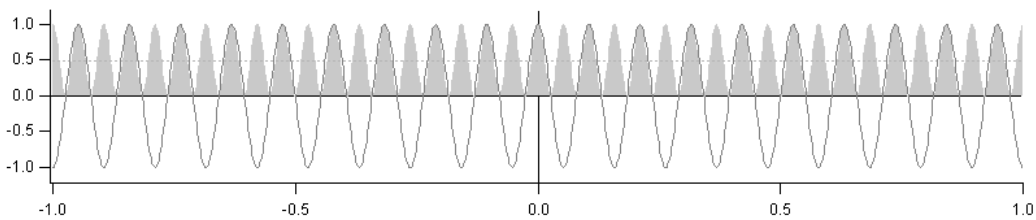
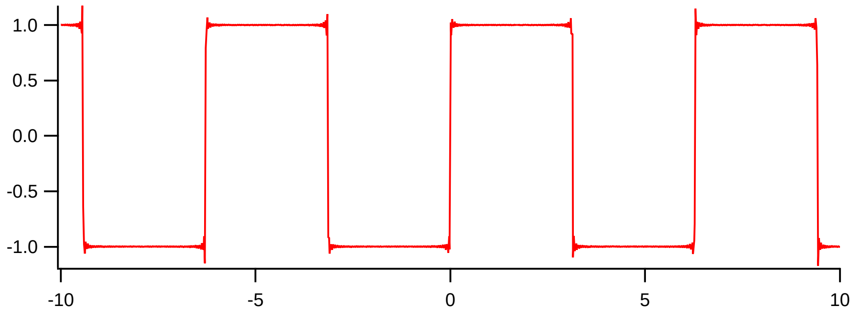


図 17　cos 関数とその 2 乗

7.2　フーリエ級数いろいろ

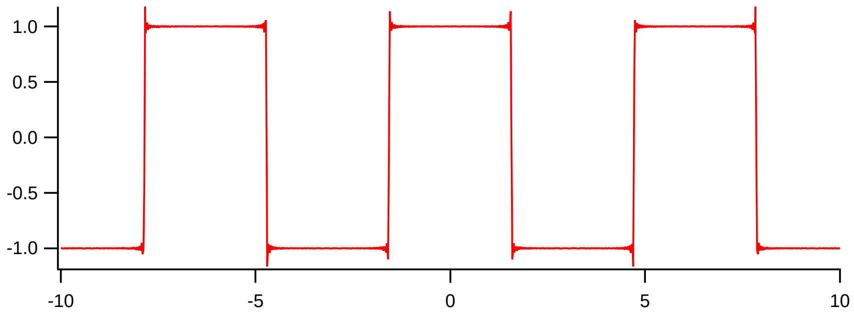
※ グラフは 100 項までを数値計算したもの

(1) 矩形その 1



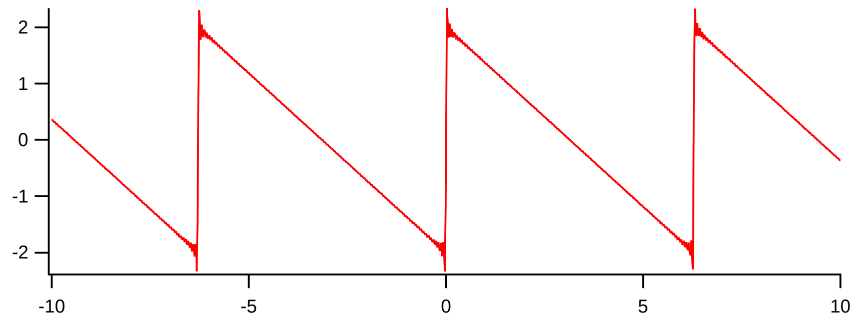
$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \cdots\right)$$

(2) 矩形その 2



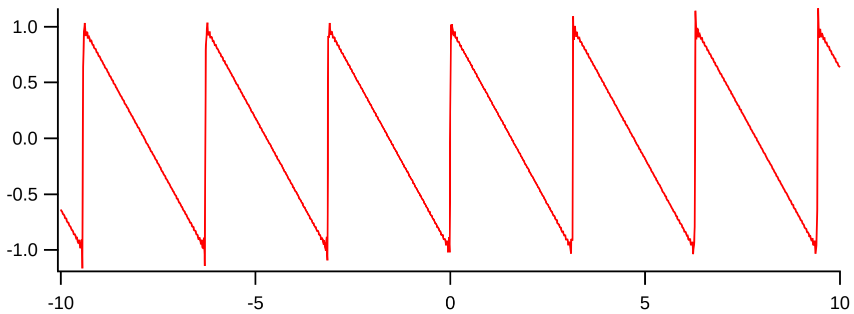
$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \frac{\cos 7x}{7} + \cdots\right)$$

(3) ノコギリその 1



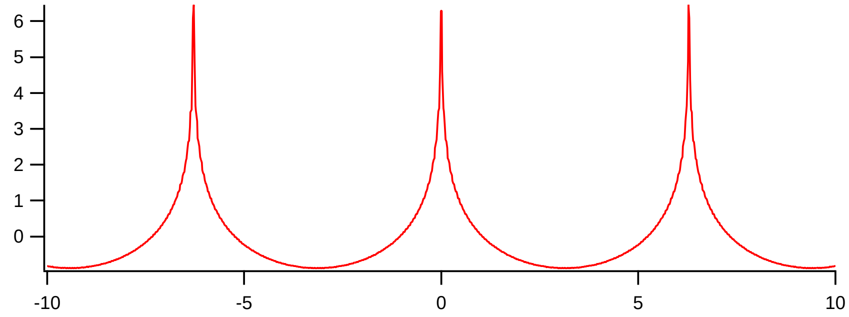
$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right)$$

(4) ノコギリその 2



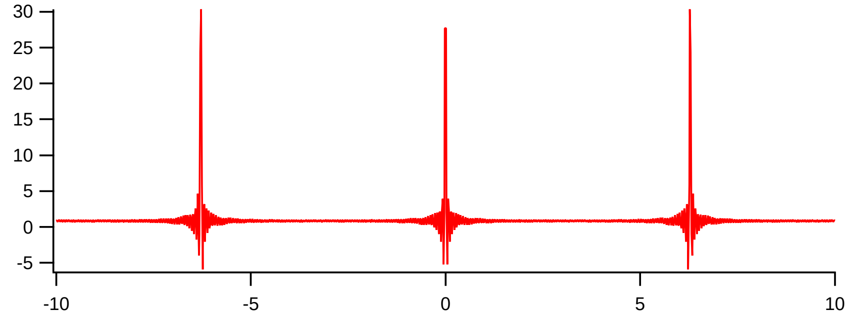
$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 8x}{8} + \cdots\right)$$

(5) トゲ型



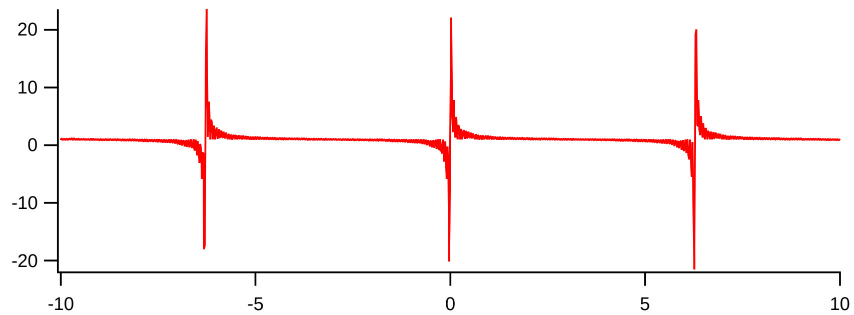
$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 4x}{4} + \frac{\cos 5x}{5} + \cdots\right)$$

(6) δ 関数



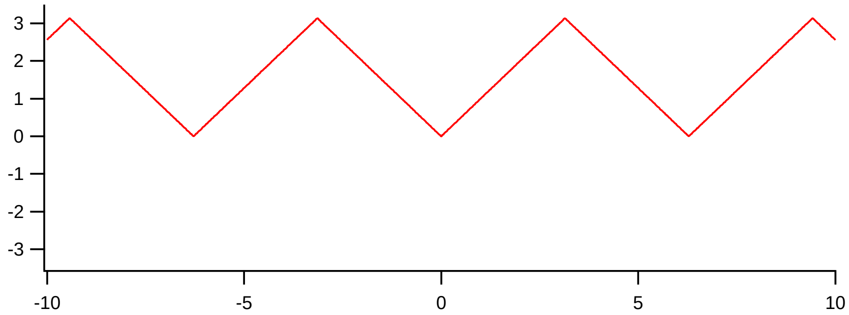
$$f(x) = 1 + \frac{1}{\pi}(\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \cos 5x + \cdots)$$

(7) δ 関数に似た関数



$$f(x) = 1 + \frac{1}{\pi}(\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x + \cdots)$$

(8) 対称なギザギザ ($f(x) = x$ 型)



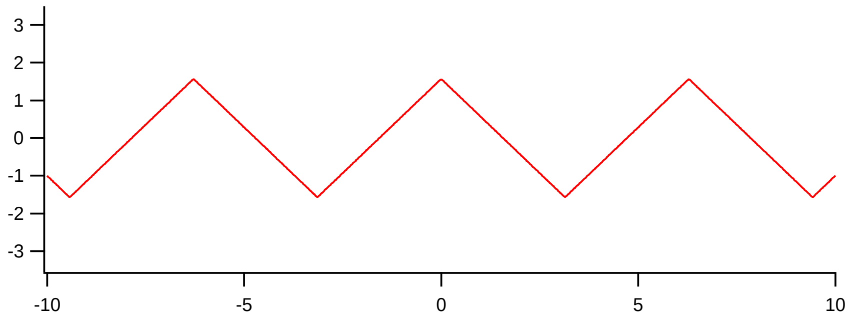
$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \cdots\right)$$

ここで $f(0) = 0$ を使えば、

$$\boxed{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots \quad = \quad \frac{\pi^2}{8}}$$

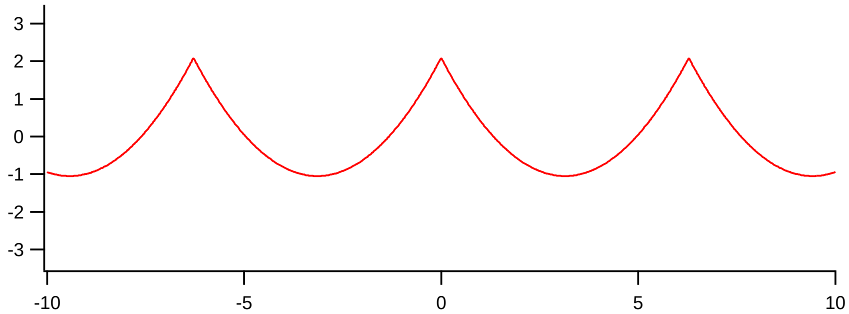
が得られる

(9) 対称なギザギザ ($f(x) = -x$ 型)



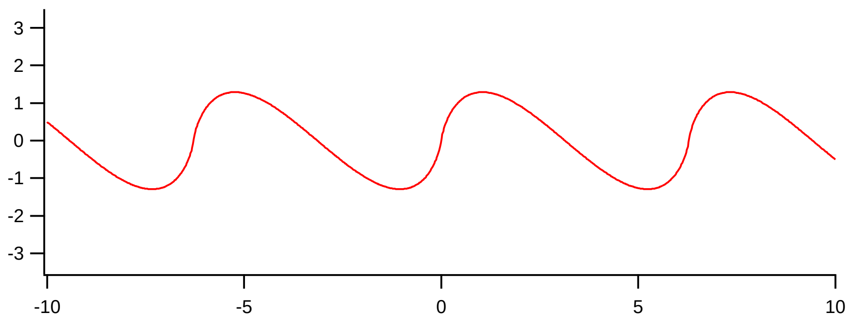
$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \cdots\right)$$

(10) さざ波 (放物線)



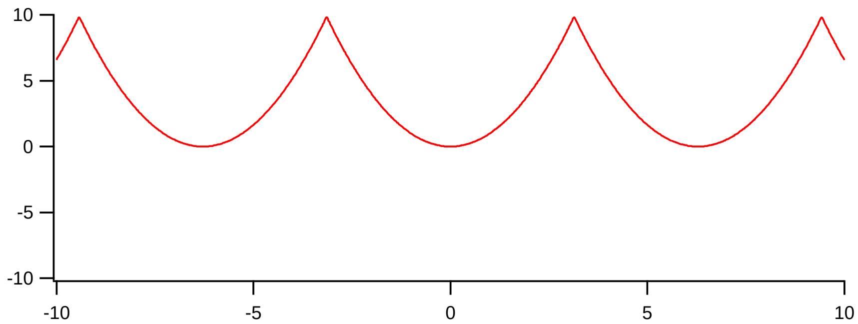
$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 4x}{4^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 6x}{6^2} + \cdots\right)$$

(11) あら波



$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 4x}{4^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} + \frac{\sin 6x}{6^2} + \cdots\right)$$

(12) 放物線 $y = x^2$



$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\left(-\cos x + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 4x}{4^2} - \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 6x}{6^2} + \cdots\right)$$

ここで $f(\pi) = \pi^2$ を使えば、

$$\boxed{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}}$$

が得られる

7.3 複素フーリエ級数

複素フーリエ級数展開

区間 $[-L, L]$ で定義された関数 $f(x)$ について、以下が成立。

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \exp\left(i\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\exp\left(-i\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

(証明)

前節のフーリエ級数の式中の三角関数に以下を代入する。

$$\cos\frac{n\pi x}{L} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{n\pi x}{L}i} + e^{-\frac{n\pi x}{L}i}\right)$$

$$\sin\frac{n\pi x}{L} = \frac{1}{2i}\left(e^{\frac{n\pi x}{L}i} + e^{-\frac{n\pi x}{L}i}\right)$$

やればわかる

(証明終り)

(参考)

区間 $[-L, L]$ で定義される関数 $f(x)$ が、**互いに直交する**関数 $g_n(x) = \exp\left(i\frac{n\pi x}{L}\right)$ で展開されている。

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n g_n(x)$$

これは、関数 $f(x)$ が、

$$|f\rangle = |\cdots,\ \alpha_{-1},\ \alpha_0,\ \alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n,\ \cdots\rangle$$

という一連の係数のセット (=ベクトル) で表現できることを意味する。この方法でいけば、$g_n(x)$ は、n 番目の係数のみが 1 で、他の係数はみなゼロであるベクトルとなる。

$$|g_n\rangle = |\cdots,\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 1,\ \cdots\rangle$$

関数どうしを掛け合わして積分することは、ベクトルの内積をとることに相当している。

$$\langle g_n \mid f\rangle = \int_{-L}^{L} g_n^*(x)\cdot f(x)\,dx = \alpha_n$$

(注意) 内積の左側のベクトルに相当する関数は、実際の積分では複素共役をとる。

f と f の内積 (つまり自身との内積) をとることで、大きさ (ノルム) が得られる

$$\|f\|^2 \quad = \langle f \mid f\rangle \quad = \int_{-L}^{L} f^*(x)\cdot f(x)\,dx \quad = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^*\cdot\alpha_n$$

これが、波動関数 $\Psi(x)$ ならば、「存在確立」ということになる。